名古屋大学数学ⅠAⅡB を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**名古屋大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚されたときには，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，名古屋大学に通用する力となるでしょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「名古屋大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まります。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，名古屋大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

<名古屋大学数学ⅠAⅡB　目次>

第１講　方程式・不等式・証明
第２講　図形と方程式
第３講　微分法・積分法①
第４講　微分法・積分法②
第５講　ベクトル
第６講　数列
第７講　場合の数・確率
第８講　整数問題
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

<講座の受講の仕方>

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に名古屋大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん，このまま続ければ（おそらく）最後の答に行き着く！　というところまでいっている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じとってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られています

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

から，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じとったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いします。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。これもテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際にていねいに記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかし，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題などとのバランスを見ながら，着々と進めていきましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答に行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答にたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが,「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず,「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強, 特に受験が近づいてきている時期に求められるのは,「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・「1対1対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cの全6冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に上げるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　（東京出版）

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意してください。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　（河合塾 SERIES）

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・名古屋大学　赤本　（教学社）

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　方程式・不等式，証明

1　k を与えられた整数とする．任意の自然数 n に対して２次方程式

$$x^2+k\left(n+\frac{1}{2}\right)x+k\left(n+\frac{3}{2}\right)=0$$

が実数解をもつためには，k はどのような範囲にあればよいか．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　［1］　$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の式を証明せよ．

（1）　$ab+1>a+b$

（2）　$abc+2>a+b+c$

［2］　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$，$x+y+z=0$ ならば，$ax+by+cz \geqq 0$ であることを証明せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1辺の長さが1の正方形 ABCD の辺 AD 上に点 P をとり，AC，BP の交点を Q とするとき，面積 $S=\triangle\text{APQ}+\triangle\text{QBC}$ の最小値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1　放物線 $y=x^2$ の上に２点 P，Q があって，線分 PQ の中点が直線 $y=x+1$ の上にあるとき，このような直線PQ は，すべてある一定の放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接することを示し，a，b，c の値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる3点 $\mathrm{P}(a,\ a^2-2)$, $\mathrm{Q}(b,\ b^2-2)$, $\mathrm{R}(c,\ c^2-2)$ がある．原点を中心とする半径1の円を S とし，直線PQ，直線PRはそれぞれ S に接するとする．

(1)　線分QRの中点の座標を a を用いて表せ．

(2)　直線QRもまた S に接することを証明せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 点Pを通る直線に関して円 $x^2+y^2=1$ を対称に移動させたところ，この円が x 軸に接した．このような点Pの存在範囲を図示せよ．

［2］ 放物線 $y=-\frac{1}{3}x^2$ を，その頂点がいつも放物線 $y=x^2$ の上にあるように平行移動させる．こうして得られるどの放物線も通らない範囲を求め，図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法，積分法①

1　曲線 $C: y=x^3$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t \neq 0$）がある．点Pにおける C の接線と C とのもう１つの交点をQとし，点Qにおける C の接線と C とのもう１つの交点をRとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 P$(p,\ f(p))$，Q$(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 l：$y=x+k$ を考える．

(1) 放物線と直線 l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めよ．

(2) k は(1)で求めた条件を満たすとして，さらに $k>0$ とする．(1)の 2 つの共有点を P，Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法，積分法②

1　２つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ とは２点で交わり，交点におけるこれら２つの放物線の接線は互いに直交するという．a，b，c が変化するとき，このような放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点の全体はどのような集合をつくるか調べ，その集合を図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の実数とし，$f(x)=2x^3-3a(a+1)x^2+6a^3x$ に対して $g(a)=\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a |f'(x)|dx$ とする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(a)$ を求めよ．

(2)　$g(a)$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 放物線 $C: y=ax^2$ $(a>0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p\neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする．直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) 点 P を $p>0$ の範囲で動かす．$S(p)$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(p)$ を求めよ。

［2］ a，b を実数とする．xy 平面上で，直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=(x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq 2$ を満たす点で接しているとする．

(1) このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2) 曲線 C および 3 つの直線 l，$x=0$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ベクトル

1　[1]　三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA を $m:n$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．どんな自然数の組 $(m,\ n)$ をとっても AE ⊥ DF となるならば，△ABC はどんな三角形か．

[2]　△OAB において，∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

(1)　P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．

(2)　線分 OQ の長さを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正三角形 ABC に時速 u，v，w で等速運動する 3 点があって，それぞれ A から辺 AB に沿って B へ，B から辺 BC に沿って C へ，C から辺 CA に沿って A へ同時に出発したとする．t 時間後のそれらの位置をそれぞれ P(t)，Q(t)，R(t) とする．いずれかの点が次の頂点に到達するまでの間，△P(t)Q(t)R(t) の重心が動かないための条件を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 四面体 ABCD において，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC が成り立つならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを証明せよ．

［2］ 1辺の長さが1の正四面体OABCを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．動点 P は O から A へ辺 OA を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，同時に動き出す．

(1) 動き出してから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq 1)$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする．

(1)　$P(5)$ を求めよ．

(2)　n が奇数のとき，$P(n)$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 数列 $\{a_n\}$ があって，すべての n について，初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和が $\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$ に等しいとする.

(1) a_n がすべて正とする．一般項 a_n を求めよ.

(2) 最初の 100 項のうち，1 つは負で他はすべて正とする．a_{100} を求めよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　複素数　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{7}\,i}{2}$,　$\beta=\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}$　について(1)と(2)を証明せよ.

(1)　すべての正の整数 n に対して次の等式が成り立つ.

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^{n}+\beta^{n}-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

(2)　すべての正の整数 n に対して $\alpha^{n}+\beta^{n}$ は奇数である.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　場合の数・確率

1 ［1］ 1個のバクテリアが10分後に2個，1個，0個になる確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$である．

1個のバクテリアが

(1) 20分後に2個になっている確率

(2) 30分後に6個になっている確率

を求めよ．

［2］ 3チームA，B，Cが1日に総当たり3試合を行って2勝したチームを優勝とし，優勝チームが出るまで毎日繰り返す．ただしAがBに勝つ確率，BがCに勝つ確率，CがAに勝つ確率は，いずれも$p\,(0<p<1)$であり，引き分けはないものとする．第n日目に優勝チームが決まる確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ xy 平面上に動点Pがある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ1だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ1だけ進むものとする．動点Pは最初原点にあるものとし，さいころを8回投げたとき，原点からPまでの距離が6以下となる確率を求めよ．

［2］ 赤球 r 個，白球 n 個が入っている袋の中から同時に2個取り出す．ただし，r は2以上の自然数とする．

(1) 赤球，白球が1個ずつである確率を求めよ．

(2) r を固定するとき，(1)の確率を最大にする n とそのときの確率を r を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］　1の目が出ているサイコロがある．このサイコロを等確率でいずれかの横の面の側に倒す．この操作を繰り返して n 回目に1か6が出る確率を求めよ．ただし，1と6は反対側の面にあるものとする．

［2］　座標平面上に4点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n 秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．

(1)　a_2，c_2，a_4，c_4 を求めよ．

(2)　a_{2n} を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　整数問題

1　［1］　サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る．ただし，サイレンは 1 秒または 2 秒鳴り続けて 1 秒休み，これを繰り返す．また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする．

(1)　1 秒または 2 秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回，n 回とするとき，m，n の満たす関係式を求めよ．

(2)　信号は何通りできるか．

［2］　次の方程式を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ．

$$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　［1］　l，m，n を自然数とする．$l+m+n$ が奇数のとき，整数 $3^l \times 5^m \times 7^n$ のすべての正の約数の総和が偶数であることを示せ．

［2］　a を奇数，m を整数とするとき，次のことを証明せよ．ただし $a>1$，$m>1$ とする．

(1)　m が偶数ならば a^m+1 は 4 で割り切れない．

(2)　m が奇数ならば a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れる．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）を考える．$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数であることを示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　実数 a に対して，点 $(a,\ 1)$ を通り傾きが a の直線と曲線 $y=|x^2-4|$ との交点の個数を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 xy 平面上において，点 P を通る直線 l と曲線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}$ である．この条件を満たす点 P が描く軌跡を求め，これを図示せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 Oを原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の2点A，Bに対し，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$ とおく．

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $t=2$ のとき，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ となる点Pの軌跡を求め，図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　総合問題(2)

1　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$a_n^2-2b_n^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を1つ求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 (x, y, z) が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．
ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 A, B, Cの3人が，それぞれさいころを振り，出た目の大きい順に順位を決めるものとする．ただし，同じ目が出た場合は同順位とする．たとえば，AとBが5を出しCが3なら，AとBが1位でCは3位とする．Aが5を出しBとCが3なら，Aが1位でBとCは2位とする．また，AもBもCも5を出せば，3人とも1位とする．以下の問いに答えよ．

(1) 1位，2位，3位が，すべて単独で決まる確率を求めよ．

(2) Aが1位となる確率を求めよ．

(3) AとBの少なくとも一方が1位となる確率を求めよ．

(4) 単独で1位なら4点，2人で1位なら3点，3人で1位なら2点，単独で2位なら2点，2人で2位なら1点，3位なら0点が与えられる場合，Aの得点の期待値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 (1)　0以上の2数 α，β について，相加平均 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が相乗平均 $\sqrt{\alpha\beta}$ 以上であることを証明せよ．

(2)　$p>0$，$q>0$，$m>0$ とする．座標平面上で点 (p, q) を通り，傾きが $-m$ の直線の，x 軸，y 軸との交点の座標をそれぞれ求めよ．

(3)　(2)の2つの交点と原点の3点を頂点とする三角形の面積の，m を変化させたときの最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を正の整数とする．

（1）$a>b>0$ とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^{n+1}-b^{n+1}>(n+1)(a-b)b^n$$

（2）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ と $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ の大小を比較せよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の定数とする．放物線 P：$y=ax^2$ 上の動点 A を中心とし x 軸に接する円を C とする．動点 A が放物線 P 上のすべての点を動くとき，座標平面上で $y>0$ の表す領域において，どの円 C の内部にも含まれない点がある．この点の集まりを図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上で，１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点Ｐの x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心Ｃの座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が交わり，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=x^3-3x^2+x$ とし，放物線 $y=f(x)$ が定める曲線を F とする．

(1)　直線 $y=2x-3$ と曲線 F の 3 つの交点の座標を求めよ．

(2)　(1)で求めた 3 つの交点を $\mathrm{A}(a,\, f(a))$，$\mathrm{B}(b,\, f(b))$，$\mathrm{C}(c,\, f(c))$ $(a<b<c)$ とし，曲線 F 上に点 $\mathrm{P}(p,\, f(p))$ をとる．P が $b<p<c$ を満たすとき，三角形 BPC の面積 S を p を用いて表せ．

(3)　(2)で求めた面積 S の最大値とそのときの p の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|dx$ とおく．$f(t)$ の最小値とそれを与える t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を正の数とする．xy 平面において，次の条件(i)と(ii)を満たす直線 l が存在するような p の範囲を求めよ．

(1)　l の y 切片は p である．

(2)　放物線 $C: y=3x^2$ と l で囲まれる図形の面積は 4 以下である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

名大数学ⅠＡⅡＢ　第５講　ベクトル　練習問題

1　三角形 ABC の内部に点 P をとって，AP の中点を M，BM の中点を N とするとき，P が CN の中点となるようにしたい．点 P の位置をどのように定めればよいか．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内に 4 点 P(3, 1, 4)，A(1, 2, 3)，B(1, 1, 2)，C(2, 1, 1) がある．直線 PA，直線 PB，直線 PC と xy 平面の交点をそれぞれ A′, B′, C′ とする．

(1)　△ABC の面積を求めよ．

(2)　△A′B′C′ の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}b_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots\cdots + na_1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2) $\{b_n\}$ が初項 $b_1 = p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする．このとき，すべての正の整数 n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　1つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている．この箱からm枚$(3 \leqq m \leqq 12)$のカードを同時に取り出す．このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を$p(m)$とする．

(1)　$p(m)$を求めよ．

(2)　$4 \leqq m \leqq 12$のとき，$f(m) = \dfrac{p(m-1)}{p(m)}$を求めよ．

(3)　$p(m)$を最大にするmの値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1回目はAが投げる．

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

(1)　n 回目にAがサイコロを投げる確率を a_n，Bがサイコロを投げる確率を b_n とする．a_n，b_n を求めよ．

(2)　ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ．

(3)　n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a，b，c は正の整数で，$a<b<c$，$a+b<c$ を満たすものとする．このとき整式 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$ が $x-c$ で割り切れるような (a, b, c) の組をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1から n までの自然数1，2，3，……，n の和を S_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　n を4で割った余りが0または3ならば，S_n が偶数であることを示せ．

(2)　S_n が偶数ならば，n を4で割った余りが0または3であることを示せ．

(3)　S_n が4の倍数ならば，n を8で割った余りが0または7であることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a，t を実数とし，a は $|a|\leqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x\leqq a) \\ -a^2+3 & (x>a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また l を $y=tx+t+2$ で定まる直線とする．

(1)　直線 l は t によらず定点を通ることを示せ．また l が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような t を求めよ．

(2)　C と l が相異なる 2 点のみを共有するような t の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 曲線 C：$y=-x^2-1$ を考える．

(1) t が実数全体を動くとき，放物線 $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を(1)で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする．D と l とで囲まれた部分の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 (1) 自然数 a, b は, $1<a<b$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす. a, b の組をすべて求めよ.

(2) 自然数 a, b, c は, $1<a<b<c$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす. a, b, c の組をすべて求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　ある袋に10と書かれた2枚のカードと5と書かれた3枚のカードが入っている．この袋の中をよくかきまぜてから，カードを取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この袋からカードを2枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計の期待値を求めよ．

(2)　最初に，この袋からカードを2枚取り出す．2枚のカードに書かれた数が異なる場合には，次もそのまま続けて3枚目のカードを取り出す．一方，初めに取り出したカードに書かれた数が同じ場合には，そのうちの1枚のカードを袋に戻した後に，3枚目のカードを取り出すことにする．このとき，袋に戻したカードも含めて，取り出した3枚のカードに書かれていた数の合計の期待値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　方程式・不等式，証明

[1]　k を与えられた整数とする．任意の自然数 n に対して2次方程式

$x^2+k\left(n+\frac{1}{2}\right)x+k\left(n+\frac{3}{2}\right)=0$　が実数解をもつためには，k はどのような範囲にあればよいか．

$$x^2+k\left(n+\frac{1}{2}\right)x+k\left(n+\frac{3}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots①$$

①の判別式を D とすると，①が実数解をもつのは $D\geqq 0$ のとき

つまり　$k^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-4k\left(n+\frac{3}{2}\right)\geqq 0$　……②　これが任意の自然数 n で成り立つときを考える．

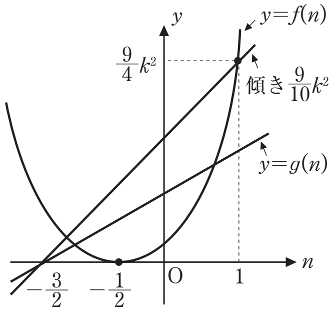
$k=0$ は②を満たす．

$k\neq 0$ のとき　$k^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\geqq 4k\left(n+\frac{3}{2}\right)$

ここで，$f(n)=k^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$，$g(n)=4k\left(n+\frac{3}{2}\right)$ とおき，$f(n)\geqq g(n)$ が任意の自然数 n で成り立つときを考える．$y=f(n)$ のグラフは頂点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，下に凸の放物線であり，$y=g(n)$ のグラフは $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通る傾き $4k$ の直線である．

$f(1)=\frac{9}{4}k^2$ より，$y=g(n)$ が $\left(1,\ \frac{9}{4}k^2\right)$ を通るとき，

$y=g(n)$ のグラフの傾きは $\frac{9}{10}k^2$ である．



よって，グラフより

$4k\leqq\frac{9}{10}k^2$　　$k(9k-40)\geqq 0$　　よって　$k<0,\ \frac{40}{9}\leqq k$

であればよい．

以上より，求める整数 k の範囲は　$\boldsymbol{k\leqq 0,\ 5\leqq k}$

[2]　[1]　$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の式を証明せよ．

(1)　$ab+1>a+b$

(2)　$abc+2>a+b+c$

(1)　(左辺)−(右辺)$=ab-a-b+1$

$=(a-1)(b-1)$

$-1<a<1$，$-1<b<1$　より　$a-1<0$，$b-1<0$

よって　(左辺)−(右辺)>0　　ゆえに　$ab+1>a+b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$|a|<1$，$|b|<1$ より　$|ab|<1$　また，$|c|<1$　　よって，(1)を利用して

$$abc+2=(ab)c+1+1>ab+c+1$$
$$=ab+1+c>a+b+c$$

ゆえに　$abc+2>a+b+c$

2　[2]　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$，$x+y+z=0$ ならば，$ax+by+cz \geqq 0$ であることを証明せよ．

$x \geqq y \geqq z$，$x+y+z=0$　であることより　$x \geqq 0$，$z \leqq 0$ である．また　$y=-x-z$

このとき　$ax+by+cz=ax+b(-x-z)+cz$

$$=(a-b)x+(c-b)z$$

$a \geqq b \geqq c$ より　$a-b \geqq 0$，$c-b \leqq 0$

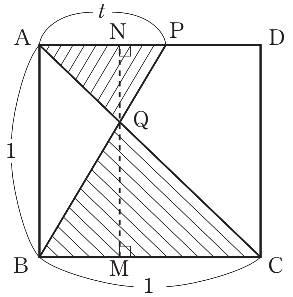
ゆえに　$(a-b)x+(c-b)z \geqq 0$　　よって　$ax+by+cz \geqq 0$

(等号成立は　$x=y=z$　または　$a=b=c$ のとき)

3　1辺の長さが1の正方形 ABCD の辺 AD 上に点 P をとり，AC，BP の交点を Q とするとき，面積 $S=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{QBC}$ の最小値を求めよ．

点 Q から辺 BC，辺 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ M，N とし，AP$=t$ とする．

$\triangle\mathrm{APQ} \backsim \triangle\mathrm{CBQ}$ であり，相似比は $t:1$ である．



$$\mathrm{QM}=1\times\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t+1} \qquad \mathrm{QN}=1\times\frac{t}{t+1}=\frac{t}{t+1}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{t}{t+1}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{t+1}$$
$$=\frac{t^2+1}{2(t+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1}{t+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(t-1+\frac{2}{t+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+1+\frac{2}{t+1}-2\right)$$

$t+1>0$ より，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) から

$$S \geqq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-2\right)=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2)=\sqrt{2}-1$$

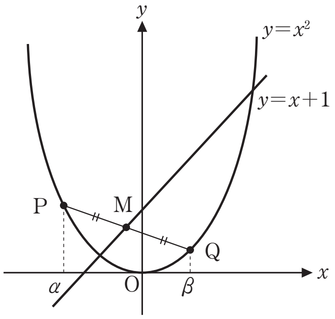
等号成立は　$t+1=\dfrac{2}{t+1}$　　$(t+1)^2=2$　つまり　$t=-1+\sqrt{2}$　のとき（$0 \leqq t \leqq 1$ より）

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1　放物線 $y=x^2$ の上に２点 P，Q があって，線分 PQ の中点が直線 $y=x+1$ の上にあるとき，このような直線PQ は，すべてある一定の放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接することを示し，a，b，c の値を求めよ．



P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると

線分 PQ の中点は，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ と表すことができる．

これが $y=x+1$ 上にあるとき

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1$ より $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha+\beta+2$……①

直線 PQ：$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$ より $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$……②

ここで，$\alpha+\beta=t$ とおくと，①より $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)$

よって，α，β は２次方程式　$X^2-tX+\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)=0$　の２解である．

α，β は実数より，この式の判別式を D とすると

$D=t^2-4\cdot\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)\geqq 0$　　$t^2-2t-4\leqq 0$　　よって　$1-\sqrt{5}\leqq t\leqq 1+\sqrt{5}$ ……③

また，②より　$y=tx-\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)$

これが $y=ax^2+bx+c$ と接するのは，この２式より y を消去し，x について整理した式

$2ax^2+2(b-t)x+2c+t^2-t-2=0$

が重解をもつときである．

したがって　$(b-t)^2-2a(2c+t^2-t-2)=0$

$(1-2a)t^2+2(a-b)t+b^2-4a(c-1)=0$

この式が③を満たすすべての t で成り立つのは

$1-2a=0$　かつ　$a-b=0$　かつ　$b^2-4a(c-1)=0$

つまり，$a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{9}{8}$ のときであり，このとき直線PQ は放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接する．

よって　$\boldsymbol{a=b=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{9}{8}}$

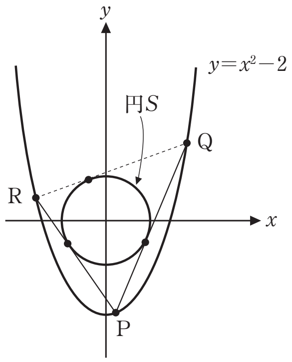
2 放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる3点 $\mathrm{P}(a, a^2-2)$，$\mathrm{Q}(b, b^2-2)$，$\mathrm{R}(c, c^2-2)$ がある．原点を中心とする半径1の円を S とし，直線PQ，直線PRはそれぞれ S に接するとする．

(1) 線分QRの中点の座標を a を用いて表せ．

(2) 直線QRもまた S に接することを証明せよ．

(1) 直線PQ：$y=\dfrac{(b^2-2)-(a^2-2)}{b-a}(x-a)+a^2-2$

$=(a+b)x-ab-2$



したがって　$(a+b)x-y-ab-2=0$

これが円 S：$x^2+y^2=1$ に接するとき

$$\frac{|ab+2|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1 \quad \text{より} \quad |ab+2|=\sqrt{(a+b)^2+1}$$

$$(ab+2)^2=(a+b)^2+1$$

$$(a^2-1)b^2+2ab+3-a^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

同様に，直線PRが円 S に接するとき，b を c に替えて $(a^2-1)c^2+2ac+3-a^2=0 \cdots\cdots②$

①，②より b，c は x の2次方程式

$(a^2-1)x^2+2ax+3-a^2=0$　の異なる2解である．よって，$a \neq \pm 1$

解と係数の関係より $b+c=-\dfrac{2a}{a^2-1}$，$bc=\dfrac{3-a^2}{a^2-1}$

したがって，線分QRの中点の

x 座標は　$\dfrac{b+c}{2}=-\dfrac{a}{a^2-1}$

y 座標は　$\dfrac{b^2+c^2-4}{2}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-4}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{(a^2-1)^2}-2\cdot\frac{3-a^2}{a^2-1}-4\right)$$

$$=\frac{-a^4+2a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{2}{(a^2-1)^2}-1$$

よって　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{a}{a^2-1},\ \dfrac{2}{(a^2-1)^2}-1\right)}$

(2) 直線QR：$(b+c)x-y-bc-2=0$ と円 S の中心 $(0, 0)$ との距離は

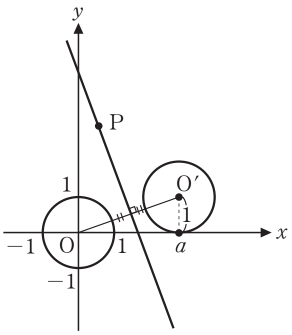
$$\frac{|bc+2|}{\sqrt{(b+c)^2+1}}=\frac{\left|\dfrac{3-a^2}{a^2-1}+2\right|}{\sqrt{\dfrac{4a^2}{(a^2-1)^2}+1}}=\frac{\left|\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right|}{\sqrt{\dfrac{(a^2-1)^2+4a^2}{(a^2-1)^2}}}=\frac{\dfrac{|a^2+1|}{|a^2-1|}}{\dfrac{\sqrt{(a^2+1)^2}}{|a^2-1|}}=\frac{|a^2+1|}{|a^2+1|}=1$$

となり，QRも S に接する．よって，示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　点Pを通る直線に関して円 $x^2+y^2=1$ を対称に移動させたところ，この円が x 軸に接した．このような点Pの存在範囲を図示せよ．

移動後の円の中心を $O'(a,\ \pm1)$ とおくと，点Pは線分 OO' の垂直二等分線上にある．



OO' の中点は $\left(\frac{a}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$　$\overrightarrow{OO'}=(a,\pm1)$

よって，OO' の垂直二等分線：$a\cdot\left(x-\frac{a}{2}\right)\pm1\cdot\left(y\mp\frac{1}{2}\right)=0$

（複号同順）

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)\pm y-\frac{1}{2}=0$$

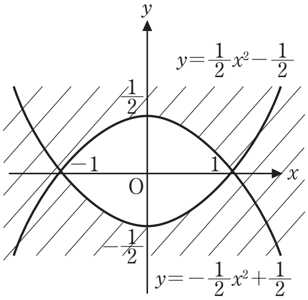
この上に $P(X,\ Y)$ があるとき

$$a\left(X-\frac{a}{2}\right)\pm Y-\frac{1}{2}=0 \quad a^2-2Xa+(1\mp2Y)\geqq0$$

これを満たす実数 a が存在するのは　$X^2-(1\mp2Y)\geqq0$ のとき

つまり　$Y\geqq-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}$，$Y\leqq\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}$

よって，求める存在範囲は右図斜線部分（境界含む）



3 ［2］　放物線 $y=-\frac{1}{3}x^2$ を，その頂点がいつも放物線 $y=x^2$ の上にあるように平行移動させる．こうして得られるどの放物線も通らない範囲を求め，図示せよ．

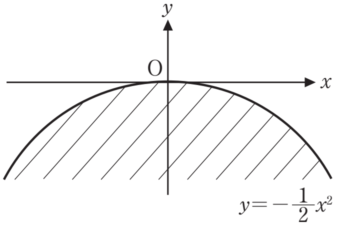
移動後の頂点の座標を $(t,\ t^2)$ とすると，放物線は $y=-\frac{1}{3}(x-t)^2+t^2$ と表せる．

これを変形して　$2t^2+2xt-(x^2+3y)=0$

この式を満たす実数 t が存在しないのは　$x^2+2(x^2+3y)<0$　つまり　$\boldsymbol{y<-\frac{1}{2}x^2}$ のとき

これが求める範囲である．

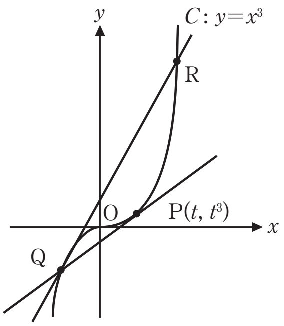
よって，求める範囲は下図斜線部分（境界含まない）



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法，積分法①

1　曲線 $C: y=x^3$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t, t^3)$（ただし，$t\neq 0$）がある．点Pにおける C の接線と C とのもう１つの交点をQとし，点Qにおける C の接線と C とのもう１つの交点をRとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$ のとり得る値の範囲を求めよ．



$C: y=x^3$　より　$y'=3x^2$

点Pにおける C の接線の傾きは $3t^2$ であり，接線の方程式は

$y=3t^2(x-t)+t^3$　より　$y=3t^2x-2t^3$

C との交点は

$x^3=3t^2x-2t^3$

$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$(x-t)^2(x+2t)=0$　　よって　$x=t, -2t$

ゆえに　$\mathrm{Q}(-2t, -8t^3)$

点Qにおける C の接線の傾きは　$3(-2t)^2=12t^2$　である．

ここで，直線PQ，QRと x 軸の正方向のなす角をそれぞれ α，β とすると

$\tan\alpha=3t^2$，$\tan\beta=12t^2$

よって　$\tan\angle\mathrm{PQR}=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{9t^2}{1+36t^4}=\dfrac{9}{\dfrac{1}{t^2}+36t^2}$　（$t\neq 0$ より）

ここで，$t^2>0$ より　$\dfrac{1}{t^2}+36t^2\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{t^2}\times 36t^2}=12$

等号成立は $\dfrac{1}{t^2}=36t^2$ より　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　のとき

よって　$0<\tan\angle\mathrm{PQR}\leqq\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{4}{5}\leqq\cos\angle\mathrm{PQR}<1}$

2　a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の２点 $\mathrm{P}(p, f(p))$，$\mathrm{Q}(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+(3a-6)$

$f'(x)=0$ より，　$3x^2+2ax+(3a-6)=0$ が異なる２実数解をもてばよい．

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-9a+18>0$　　よって　$\boldsymbol{a<3,\ 6<a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f'(x)=0$ の2解が p，$q(p<q)$ である．

ここで，$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right)+\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)x+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$ より

$$f(p)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)p+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$$

$$f(q)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)q+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$$

$f(q)-f(p)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)(q-p)$　　よって　$m=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\boldsymbol{-\frac{2}{9}a^2+2a-4}$

3　座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l:y=x+k$ を考える．

(1)　放物線と直線 l が異なる2個の共有点をもつような k の範囲を求めよ．

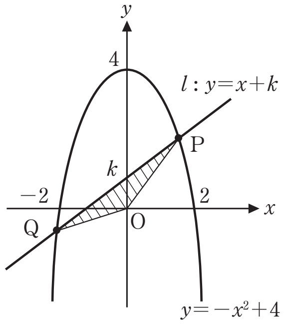
(2)　k は(1)で求めた条件を満たすとして，さらに $k>0$ とする．(1)の2つの共有点をP，Qとし，Oを原点とするとき，三角形OPQの面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ．

(1)　$-x^2+4=x+k$　より　$x^2+x+k-4=0$　……①

が異なる2実数解をもてばよい．

判別式を D とすると　　$D=1-4(k-4)>0$

よって　$\boldsymbol{k<\frac{17}{4}}$



(2)　条件より，$0<k<\frac{17}{4}$

①の2解を α，β とし，$P(\alpha,\alpha+k)$，$Q(\beta,\beta+k)$ とすると，$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=k-4$ である．

△OPQの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\alpha(\beta+k)-(\alpha+k)\beta|=\frac{1}{2}k|\alpha-\beta|\qquad S^2=\frac{1}{4}k^2(\alpha-\beta)^2=\frac{1}{4}k^2(-4k+17)$$

ここで，$f(k)=k^2(-4k+17)$ とすると

$$f'(k)=-12k^2+34k=-2k(6k-17)$$

k	(0)	…	$\frac{17}{6}$	…	$\left(\frac{17}{4}\right)$
$f'(x)$		＋	0	−	
$f(x)$	(0)	↗	最大	↘	(0)

よって，△OPQの面積は　$\boldsymbol{k=\frac{17}{6}}$　のときに最大となり

その最大値は　$\sqrt{\frac{1}{4}f\left(\frac{17}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2\cdot\frac{17}{3}}=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{51}}{36}}$　である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法，積分法②

1　２つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ とは２点で交わり，交点におけるこれら２つの放物線の接線は互いに直交するという．a，b，c が変化するとき，このような放物線の頂点の全体はどのような集合をつくるか調べ，その集合を図示せよ．

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots\cdots① \\ y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より　$x^2=ax^2+bx+c$　整理して　$(a-1)x^2+bx+c=0$　……③

①，②が２点で交わるので　$a\neq 1$　かつ　$b^2-4(a-1)c>0$　……④

このとき，③の２解を α，β とおく $(\alpha<\beta)$ と，①で $y'=2x$，②で $y'=2ax+b$ である．

$x=\alpha$，β における①と②の接線が直交するので

$$\begin{cases} 2\alpha(2a\alpha+b)=-1 \\ 2\beta(2a\beta+b)=-1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} 4a\alpha^2+2b\alpha+1=0 \\ 4a\beta^2+2b\beta+1=0 \end{cases}$$

よって，α，β は x についての２次方程式　$4ax^2+2bx+1=0$　……⑤　の２解である．

③と⑤を比較する．

$b=0$ のとき　$a-1:c=4a:1$　　$a-1=4ac$　　よって　$c=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}$

　④より　$-16ac^2>0$　　$c\neq 0$　より　$a<0$　（これは $a\neq 0$，１を満たす）

　このとき　②は　$y=ax^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}$　　頂点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}\right)$，$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}>\dfrac{1}{4}$

$b\neq 0$ のとき　③は　$2(a-1)x^2+2bx+2c=0$　これと⑤を係数比較して

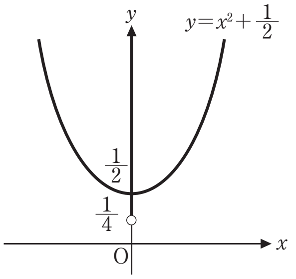
$$\begin{cases} 4a=2(a-1) \\ 1=2c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

これらは④および $a\neq 0$ を満たす．

このとき　②は　$y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2}=-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{2}$

頂点の座標を (x,y) とおくと，$x=\dfrac{b}{2}$，$y=\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{2}$　　よって　$y=x^2+\dfrac{1}{2}$　$(x\neq 0)$

以上より，求める集合は下図実線部分．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の実数とし，$f(x)=2x^3-3a(a+1)x^2+6a^3x$ に対して $g(a)=\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a |f'(x)|dx$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(a)$ を求めよ．

(2)　$g(a)$ の最小値を求めよ．

(1)　$f'(x)=6x^2-6a(a+1)x+6a^3=6(x-a^2)(x-a)$

$a\geqq 1$ のとき　$0<a\leqq a^2$

$$g(a)=\frac{1}{a^3}\int_0^a |f'(x)|dx=\frac{1}{a^3}\int_0^a f'(x)dx=\frac{1}{a^3}f(a)=\frac{1}{a^3}(3a^4-a^3)=3a-1$$

$0<a<1$ のとき　$0<a^2<a$

$$g(a)=\frac{1}{a^3}\left\{\int_0^{a^2} f'(x)dx-\int_{a^2}^{a} f'(x)dx\right\}=\frac{1}{a^3}\{f(a^2)-(f(a)-f(a^2))\}$$

$$=\frac{1}{a^3}\{2f(a^2)-f(a)\}=\frac{1}{a^3}\{2(-a^6+3a^5)-(3a^4-a^3)\}=-2a^3+6a^2-3a+1$$

よって　$\boldsymbol{g(a)=\begin{cases}-2a^3+6a^2-3a+1 & (0<a<1)\\ 3a-1 & (a\geqq 1)\end{cases}}$

(2)　$a\geqq 1$ のとき，$g(a)$ は単調増加

$0<a<1$ のとき

$$g'(a)=-6a^2+12a-3=-3(2a^2-4a+1)$$

$g'(a)=0$ となるのは，$a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	最小	↗	

よって　$a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき $g(a)$ は最小値をとる．

$g(a)=g'(a)\cdot\left(\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{3}\right)+2a$ より，求める最小値は $g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

3　[1]　放物線 $C:y=ax^2(a>0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p\neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする．直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　点 P を $p>0$ の範囲で動かす．$S(p)$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(p)$ を求めよ。

(1)　$y=ax^2$　より　$y'=2ax$

$x=p$ における法線 l の方程式は $y=-\dfrac{1}{2ap}(x-p)+ap^2$　よって $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2ap}x+\dfrac{1}{2a}+ap^2}$

(2)　l と C の交点の x 座標は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$ax^2=-\dfrac{1}{2ap}x+\dfrac{1}{2a}+ap^2$　より　$ax^2+\dfrac{1}{2ap}x-\dfrac{1}{2a}-ap^2=0$

$$(x-p)\left(ax+\frac{1}{2ap}+ap\right)=0 \qquad x=p,\ -\frac{1}{2a^2p}-p$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2a^2p}-p$とおくと

$$S(p)=\int_\alpha^p\left(-\frac{1}{2ap}x+\frac{1}{2a}+ap^2-ax^2\right)dx=\int_\alpha^p -a(x-p)(x-\alpha)dx$$

$$=\frac{a}{6}(p-\alpha)^3=\frac{a}{6}\left(2p+\frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

$p>0$ より　$2p+\dfrac{1}{2a^2p}\geqq 2\sqrt{2p\cdot\dfrac{1}{2a^2p}}=2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{2}{a}$　($a>0$ より)

等号成立は　$2p=\dfrac{1}{2a^2p}$　つまり　$p=\dfrac{1}{2a}$　のとき

よって，求める最小値は$S\left(\dfrac{1}{2a}\right)=\dfrac{a}{6}\left(\dfrac{2}{a}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3a^2}}$

このときの l の傾きは　$m=-\dfrac{1}{2ap}=\mathbf{-1}$

3　[2]　a，b を実数とする．xy 平面上で，直線 $l：y=ax+b$ は曲線 $C：y=(x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq 2$ を満たす点で接しているとする．

(1)　このときの点$(a,\ b)$の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l，$x=0$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ．

(1)　$y=(x+1)(2-x)=-x^2+x+2$　より　$y'=-2x+1$

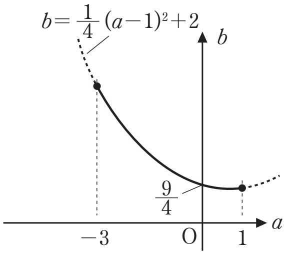
C と l の接点の x 座標を t $(0\leqq t\leqq 2)$ とすると

$-2t+1=a$　……①　　$-t^2+t+2=at+b$　……②

①より　$t=\dfrac{1-a}{2}$　これを②に代入して　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{4}(a-1)^2+2}$

また，$0\leqq t\leqq 2$ より，$\mathbf{-3\leqq a\leqq 1}$

よって，(a, b) の存在範囲は右図実線部分.



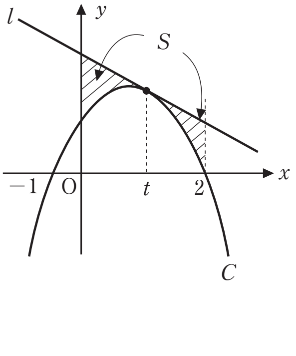
(2)　$S=\displaystyle\int_0^2(ax+b+x^2-x-2)dx$

$$=\int_0^2(x-t)^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$$

$$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}\ (0\leqq t\leqq 2)$$

ゆえに，S は $t=1$　つまり　$\mathbf{a=-1}$，$\mathbf{b=3}$ のとき

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ をとる.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ベクトル

> **1**　［1］　三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA を $m:n$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．どんな自然数の組 $(m,\ n)$ をとっても AE⊥DF となるならば，△ABC はどんな三角形か．

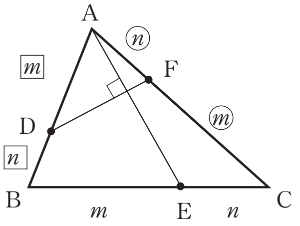
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\qquad \overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{n}{m+n}\vec{c}-\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

AE⊥DF より　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}=0$

$$\left(\frac{1}{m+n}\right)^2(n\vec{b}+m\vec{c})\cdot(n\vec{c}-m\vec{b})=0$$

$$n^2\vec{b}\cdot\vec{c}-mn|\vec{b}|^2+mn|\vec{c}|^2-m^2\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad \cdots\cdots①$$



①が任意の自然数 m，n について成り立つときを考える．

$m=1$，$n=1$ のとき，①は　$\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

ゆえに　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　であることが必要である．

$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ のとき，①は　$n^2\vec{b}\cdot\vec{c}-m^2\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$m=2$，$n=1$　のとき　$3\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　であることが必要である．

逆に，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるとき，①は任意の自然数 m，n で成り立つ．

よって，△ABC は，**∠A＝90°の直角二等辺三角形**である．

> **1**　［2］　△OAB において，∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．
> (1)　P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．
> (2)　線分 OQ の長さを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1)　∠AOP＝∠BOP＝θ とおくと

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta:\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta$$

$$=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=|\vec{a}|:|\vec{b}|$$

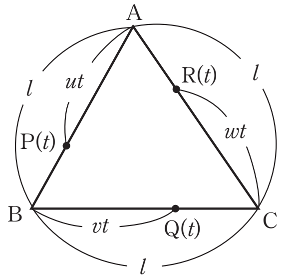
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{AOP}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right)=|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 正三角形 ABC に時速 u，v，w で等速運動する 3 点があって，それぞれ A から辺 AB に沿って B へ，B から辺 BC に沿って C へ，C から辺 CA に沿って A へ同時に出発したとする．t 時間後のそれらの位置をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$，$\mathrm{R}(t)$ とする．いずれかの点が次の頂点に到達するまでの間，$\triangle\mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{R}(t)$ の重心が動かないための条件を求めよ．

$\triangle$ABC の 1 辺の長さを l とし，$\triangle\mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{R}(t)$ の重心を $\mathrm{G}(t)$ とする．
また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．
点 P，Q，R のいずれかが次の頂点に達するのにかかる時間を T とすると，$0\leqq t\leqq T$ のとき



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{ut}{l}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{ut}{l}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{vt}{l}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+\frac{vt}{l}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{wt}{l}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{c}+\frac{wt}{l}(\vec{a}-\vec{c})$$

$\triangle$PQR の重心 $\mathrm{G}(t)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}(t)}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}+\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}\right)$$

$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\frac{t}{3l}\{u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})\}$$

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とすると，G は$\triangle$ABC の重心であり，$\overrightarrow{\mathrm{OG}(0)}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ である．

よって，$\mathrm{G}(t)$ が動かないための条件は

$\dfrac{t}{3l}\{u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})\}=\vec{0}$　が $0\leqq t\leqq T$ であるすべての t で成り立つことである．

よって　$u(\vec{b}-\vec{a})+v(\vec{c}-\vec{b})+w(\vec{a}-\vec{c})=\vec{0}$

$$u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+w\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$$

$$(u-v)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(v-w)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より，求める条件は　$\boldsymbol{u=v=w}$

3 ［1］ 四面体 ABCD において，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC が成り立つならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを証明せよ．

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおく．

AB＝CD　より　$|\vec{c}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　……①

AC＝BD　より　$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　……②

AD＝BC　より　$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$　……③

①，②，③を辺々加えて

$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　したがって　$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{c}\neq\vec{a}+\vec{b}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$　　よって　$\angle ADB=\angle ACB<90°$

同様に，$\angle BAC<90°$，$\angle CBA<90°$ より △ABC は鋭角三角形である．

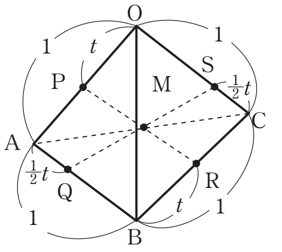
3 ［2］ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．動点 P は O から A へ辺 OA を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す．

(1) 動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ の $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$　　$\overrightarrow{OQ}=\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$　　$\overrightarrow{OS}=\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$



(2)　M は線分 PR，線分 QS 上にあるので

$\overrightarrow{OM}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OR}=(1-s)t\vec{a}+s(1-t)\vec{b}+st\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=(1-l)\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+(1-l)\frac{t}{2}\vec{b}+l\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$

と表すことができる．$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立より

$(1-s)t=(1-l)\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ……①　$s(1-t)=(1-l)\frac{t}{2}$ ……②　$st=l\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ……③

①＋③より　$t=1-\frac{t}{2}$　$\boldsymbol{t=\frac{2}{3}}$　このとき　$s=l=\frac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする．

(1)　$P(5)$ を求めよ．

(2)　n が奇数のとき，$P(n)$ を求めよ．

(1)　$n=5$ のとき　$0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq 5$

$b=0$ のとき　$a=0$，$0 \leqq c \leqq 5$

これを満たす整数の組 $(a,\ c)$ の個数は6個

$b=1$ のとき　$0 \leqq a \leqq 2$，$2 \leqq c \leqq 5$

これを満たす整数の組 $(a,\ c)$ の個数は　$3 \times 4 = 12$（個）

$b=2$ のとき　$0 \leqq a \leqq 4$，$4 \leqq c \leqq 5$

これを満たす整数の組 $(a,\ c)$ の個数は　$5 \times 2 = 10$（個）

以上より　$P(5) = 6+12+10 = \mathbf{28}$

(2)　$n=2m-1$　(m は自然数) とすると，$m = \dfrac{n+1}{2}$

$b=k$ のとき　$0 \leqq a \leqq 2k$，$2k \leqq c \leqq 2m-1$

これを満たす整数の組 $(a,\ c)$ の個数は　$(2k+1)(2m-2k)$（個）

また，$0 \leqq 2b \leqq n$　より　$0 \leqq 2k \leqq 2m-1$

よって　$P(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 2(2k+1)(m-k)$

$$= 2m + 2\sum_{k=1}^{m-1}\{-2k^2 + (2m-1)k + m\}$$

$$= 2m + 2 \times \left\{-2 \cdot \frac{1}{6}m(m-1)(2m-1) + (2m-1) \cdot \frac{1}{2}m(m-1) + m(m-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}m\{6 - 2(m-1)(2m-1) + 3(2m-1)(m-1) + 6(m-1)\}$$

$$= \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{2}+1\right)\left(2 \cdot \frac{n+1}{2}+1\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列$\{a_n\}$があって，すべてのnについて，初項a_1から第n項a_nまでの和が$\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$に等しいとする．

(1)　a_nがすべて正とする．一般項a_nを求めよ．

(2)　最初の100項のうち，1つは負で他はすべて正とする．a_{100}を求めよ．

$S_n=\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$ とおく

(1)　$a_1=S_1=\left(a_1+\dfrac{1}{4}\right)^2$

$$a_1{}^2+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{16}-a_1=0 \qquad \left(a_1-\frac{1}{4}\right)^2=0 \qquad \text{よって} \quad a_1=\frac{1}{4} \quad (>0)$$

$n\geqq 2$のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_{n-1}+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(a_n-\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_{n-1}+\frac{1}{4}\right)^2=0$$

$$(a_n+a_{n-1})\left(a_n-a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

a_nはすべて正より　$a_n\neq -a_{n-1}$　　よって　$a_n=\dfrac{1}{4}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}}$

(2)　(1)の①より　$a_n=-a_{n-1}$　……②　または　$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{2}$　……③

題意を満たすのは次の2通り．

(i)　a_1からa_{99}までがすべて正，a_{100}のみ負のとき

$n=2$から$n=99$まで③が成り立つ．　　よって　$a_{99}=\dfrac{1}{2}\cdot 99-\dfrac{1}{4}=\dfrac{197}{4}$

$n=100$で②が成り立つ．

よって　$a_{100}=-a_{99}=\boldsymbol{-\dfrac{197}{4}}$

(ii)　a_2からa_{99}までのうち，1つだけ負，あとはすべて正のとき

$$a_{k+1}=-a_k,\quad a_{k+2}=-a_{k+1}$$

つまり，$a_{k+2}=a_k$が$1\leqq k\leqq 98$のある1つのkで成り立ち，$n=k$，$k+1$，$k+2$以外のnでは③が成り立つ．

ゆえに，a_{100}は③のa_{98}に等しい．

よって　$a_{100}=\dfrac{1}{2}\cdot 98-\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{195}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　複素数　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{7}\,i}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}$　について(1)と(2)を証明せよ．

(1)　すべての正の整数 n に対して次の等式が成り立つ．

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

(2)　すべての正の整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は奇数である．

(1)　$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$ より

α, β は2次方程式 $x^2-x+2=0$ の2解である．

よって　$\alpha^2-\alpha+2=0$　　$\alpha^2=\alpha-2$　　$\alpha^{n+1}=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$

同様に　$\beta^{n+1}=\beta^n-2\beta^{n-1}$

ゆえに　$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(2)　すべての正の整数 n に対し

「$\alpha^n+\beta^n$ は奇数」……(※)を示す．

〔Ⅰ〕　$n=1$ のとき　$\alpha+\beta=1$

$n=2$ のとき　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-3$

よって，(※)は $n=1, 2$ のとき成り立つ．

〔Ⅱ〕　$n=k$, $k+1$ のとき　(※)が成り立つと仮定する．

つまり，$\alpha^k+\beta^k$, $\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ がともに奇数であるとき

(1)より　$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-2(\alpha^k+\beta^k)=$(奇数)$-$(偶数)$=$(奇数)

よって，$n=k+2$ のときも(※)は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，すべての自然数 n で(※)は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

> 1 ［1］ 1 個のバクテリアが 10 分後に 2 個，1 個，0 個になる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ である．1 個のバクテリアが
>
> ⑴ 20 分後に 2 個になっている確率
>
> ⑵ 30 分後に 6 個になっている確率　を求めよ．

⑴ 20 分後に 2 個になるのは

（i） 10 分後に 2 個となり，20 分後に

・一方が 2 個，もう一方が 0 個　　・おのおのが 1 個　　のいずれかとなる場合．

その確率は　$\frac{1}{2}\times\left({}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=\frac{5}{36}$

（ii） 10 分後に 1 個となり，20 分後に 2 個となる場合．

その確率は　$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

（i）（ii）より，求める確率は　$\frac{5}{36}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{11}{36}}$

⑵ 30 分後に 6 個になるのは

（i） 20 分後に 4 個，30 分後に

・3 つが 2 個，1 つが 0 個　　・2 つが 2 個，2 つが 1 個　　のいずれかとなる場合．

その確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{1}{32}$

（ii） 20 分後に 3 個，30 分後におのおのが 2 個となる場合．

その確率は　$\frac{1}{2}\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$

（i）（ii）より，求める確率は　$\frac{1}{32}+\frac{1}{48}=\boldsymbol{\frac{5}{96}}$

> 1 ［2］ 3 チーム A，B，C が 1 日に総当たり 3 試合を行って 2 勝したチームを優勝とし，優勝チームが出るまで毎日繰り返す．ただし，A が B に勝つ確率，B が C に勝つ確率，C が A に勝つ確率は，いずれも $p(0<p<1)$ であり，引き分けはないものとする．第 n 日目に優勝チームが決まる確率を求めよ．

ある 1 日に A チームが優勝する確率は $p(1-p)$ である．B，C についても同様．

よって，ある 1 日に優勝チームが出る確率は $3p(1-p)$ である．

ゆえに，第 n 日目に優勝チームが決まる確率は，

$$\{1-3p(1-p)\}^{n-1}\times3p(1-p)=\boldsymbol{3p(1-p)(1-3p+3p^2)^{n-1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　xy 平面上に動点Pがある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ1だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ1だけ進むものとする．動点Pは最初原点にあるものとし，さいころを8回投げたとき，原点からPまでの距離が6以下となる確率を求めよ．

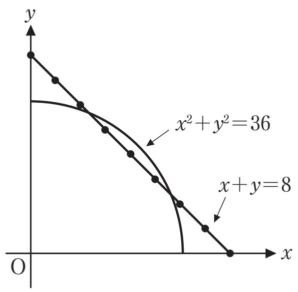
奇数の目が x 回，偶数の目が y 回出たとすると，点 $P(X, Y)$ は

$X = 1\cdot x,\ Y = 1\cdot y,\ x+y=8,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

つまり $X+Y=8$（$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$，X, Y は整数）を満たす点である．

よって，(0, 8)，(1, 7)，(2, 6)，……，(8, 0) の9点に限られる．

このうち，$X^2+Y^2\leqq 36$ を満たす点は，(3, 5)，(4, 4)，(5, 3) のみである．



ゆえに，求める確率は

$${}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{91}{128}}$$

2　[2]　赤球 r 個，白球 n 個が入っている袋の中から同時に2個取り出す．ただし，r は2以上の自然数とする．

(1)　赤球，白球が1個ずつである確率を求めよ．

(2)　r を固定するとき，(1)の確率を最大にする n とそのときの確率を r を用いて表せ．

(1)　$n\geqq 1$ のとき

$$\frac{{}_rC_1\times{}_nC_1}{{}_{n+r}C_2}=\boldsymbol{\frac{2rn}{(n+r)(n+r-1)}}$$　（$n=0$ のときも成り立つ）

(2)　(1)の確率を P_n とする．

$P_n<P_{n+1}$ ならば　$\dfrac{2rn}{(n+r)(n+r-1)}<\dfrac{2r(n+1)}{(n+r+1)(n+r)}$

$n(n+r+1)<(n+1)(n+r-1)$

$n<r-1$　　よって　$n\leqq r-2$

$P_n=P_{n+1}$　より　$n=r-1$

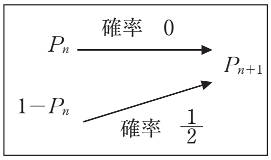
$P_n>P_{n+1}$　より　$n>r-1$　よって　$n\geqq r$

ゆえに　$P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{r-2}<P_{r-1}=P_r>P_{r+1}>\cdots\cdots$

よって，(1)の確率を最大にする n は　$\boldsymbol{n=r-1,\ r}$　で，その確率は　$\boldsymbol{\dfrac{r}{2r-1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］　1の目が出ているサイコロがある．このサイコロを等確率でいずれかの横の面の側に倒す．この操作を繰り返して n 回目に1か6が出る確率を求めよ．ただし，1と6は反対側の面にあるものとする．



n 回目に1または6が出る確率を P_n とすると，

2～5が出る確率は　$1-P_n$

よって　$P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$　　$P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$

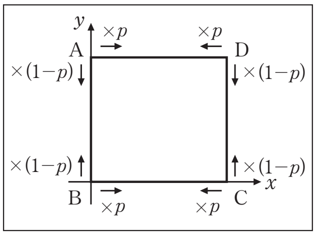
$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

1が最初に出ているので $P_0=1$ とすると　$P_0-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_0-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　　よって　$\boldsymbol{P_n=\frac{1}{3}\left\{1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

3　［2］　座標平面上に4点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n 秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．

⑴　a_2，c_2，a_4，c_4 を求めよ．　　⑵　a_{2n} を求めよ．



⑴　点QがAを出発し，2秒後にAにいるのは

A → B → A または A → D → A と移動したとき．

よって　$a_2=(1-p)^2+p^2=\boldsymbol{2p^2-2p+1}$

点QがAを出発し，2秒後にCにいるのは

A → B → C または A → D → C と移動したとき．

よって　$c_2=(1-p)p+p(1-p)=\boldsymbol{-2p^2+2p}(=1-a_2)$

点QがAを出発し，4秒後にAにいるのは，

2秒後にA，4秒後にA　（確率 $a_2\times a_2$）

2秒後にC，4秒後にA　（確率 $c_2\times\{(1-p)p+p(1-p)\}=c_2\times c_2$）と移動したとき．

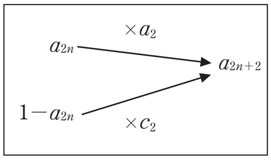
よって　$a_4=(a_2)^2+(c_2)^2=\boldsymbol{8p^4-16p^3+12p^2-4p+1}$

4秒後には点QはAまたはCにのみ存在する．

よって　$c_4=1-a_4=\boldsymbol{-8p^4+16p^3-12p^2+4p}$

⑵　$a_{2n+2}=a_{2n}\times a_2+c_{2n}\times c_2=a_{2n}\cdot(2p^2-2p+1)+(1-a_{2n})(-2p^2+2p)$

$=(2p-1)^2a_{2n}-2p^2+2p$，　$a_0=1$



$a_{2n+2}-\frac{1}{2}=(2p-1)^2\left(a_{2n}-\frac{1}{2}\right)$，　$a_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって　$a_{2n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\{(2p-1)^2\}^n$　　$\boldsymbol{a_{2n}=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　整数問題

1 ［1］ サイレンを断続的に鳴らして16秒の信号を作る．ただし，サイレンは1秒または2秒鳴り続けて1秒休み，これを繰り返す．また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする．

⑴ 1秒または2秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回，n 回とするとき，m，n の満たす関係式を求めよ．

⑵ 信号は何通りできるか．

⑴ 1秒鳴る，2秒鳴る回数をそれぞれ m，n とすると，休みの回数は $m+n-1$

$1\cdot m+2\cdot n+1\cdot(m+n-1)=16$　　よって　$\mathbf{2m+3n=17}$

⑵ $2m+3n=17$　より　$2(m-1)=3(5-n)$

2，3は互いに素より，$5-n$ は2の倍数．よって　$5-n=2k$（k は2以下の整数）とおける．

$n=-2k+5$　　このとき　$m=3k+1$

よって　$(m, n)=(1, 5), (4, 3), (7, 1)$

$m=1, n=5$ となる信号は　$\dfrac{6!}{5!}=6$（通り）

$m=4, n=3$ となる信号は　$\dfrac{7!}{4!3!}=35$（通り）

$m=7, n=1$ となる信号は　$\dfrac{8!}{7!}=8$（通り）

ゆえに，信号は　$6+35+8=$**49（通り）**できる．

1 ［2］ 次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$$

$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$ より

$(x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(x-y)-(x-y)(x+y)+(x-y)=1$

$(x-y)(x^2+y^2-x-y+1)=1$　……①

x，y は整数より　$x-y=\pm1$

$x-y=1$　つまり　$y=x-1$ のとき

①は　$x^2-2x+1=0$

$x=1$　　このとき　$y=0$

$x-y=-1$　つまり　$y=x+1$ のとき

①は　$x^2+1=0$　これを満たす整数 x はない．

ゆえに，$(x,\ y)=$**(1，0)**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　l, m, n を自然数とする．$l+m+n$ が奇数のとき，整数 $3^l\times5^m\times7^n$ のすべての正の約数の総和が偶数であることを示せ．

題意の総和は　$S=(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)(5^0+5^1+\cdots\cdots+5^m)(7^0+7^1+\cdots\cdots+7^n)$　と表される．
1つ目の因数 $(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)$ は $l+1$ 個の奇数の和である．
よって，$l+1$ が偶数，つまり l が奇数のとき $(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)$ は偶数となる．
2つ目，3つ目の因数も同様に，それぞれ m，n が奇数のときに偶数となる．
ここで，$l+m+n$ が奇数であることより，l，m，n のうち少なくとも1つは奇数である．
よって，3つの因数のうち少なくとも1つは偶数となる．ゆえに，S は偶数である．

2　[2]　a を奇数，m を整数とするとき，次のことを証明せよ．ただし，$a>1$，$m>1$ とする．

(1)　m が偶数ならば a^m+1 は4で割り切れない．
(2)　m が奇数ならば a^m+1 は1より大きな奇数で割り切れる．

(1)　$m=2n$ とおく．（n は自然数）

$$a^m+1=a^{2n}+1=(a^n)^2-1+2=(a^n+1)(a^n-1)+2$$

ここで，a^n+1，a^n-1 はともに偶数より，$a^m+1=(4\text{ の倍数})+2$
よって，a^m+1 は4で割り切れない．

(2)　m が奇数のとき

$$a^m+1=(a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}-\cdots\cdots+1)$$

2つ目の因数は m 個，すなわち3個以上の奇数の和より，1より大きい奇数となる．
よって，a^m+1 は1より大きな奇数で割り切れる．

3　多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）を考える．$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数であることを示せ．

$f(-1)=-1+a-b+c$ ……①　$f(0)=c$ ……②　$f(1)=1+a+b+c$ ……③　がすべて整数．
②より c は整数．
①＋③より $2a+2c$ が整数．　　よって　$2a$ が整数．
①－③より $2b+2$ が整数．　　よって　$2b$ が整数．
以下，m を整数とすると
$n=2m$ のとき　$f(n)=f(2m)=8m^3+2(2a)m^2+2bm+c$
$n=2m-1$ のとき　$f(n)=f(2m-1)$

$$\begin{aligned}&=(2m-1)^3+a(2m-1)^2+b(2m-1)+c\\&=(2m-1)^3+2a\cdot(2m^2-2m)+2bm+(a-b+c)\\&=(2m-1)^3+2a\cdot(2m^2-2m)+2bm+f(-1)+1\end{aligned}$$

これらはともに整数である．
よって，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題 (1)

1　実数 a に対して，点 $(a,\ 1)$ を通り傾きが a の直線と曲線 $y=|x^2-4|$ との交点の個数を求めよ．

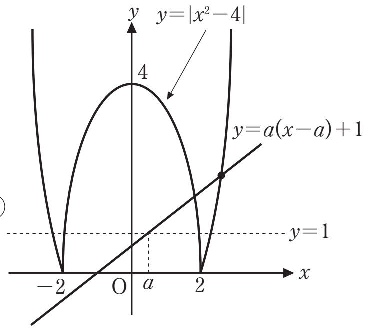
点 $(a, 1)$ を通り傾きが a の直線は　$y=a(x-a)+1$　より　$y=ax-a^2+1$　……①

①で，$a=t$ のとき　$y=tx-t^2+1$　　$a=-t$ のとき　$y=-tx-t^2+1$

よって，$a=\pm t$ のときの①の２つのグラフは y 軸に関して対称である．

また，$y=|x^2-4|$ もまた y 軸に関して対称である．

よって，$a\geqq 0$ のときの①と，曲線 $y=|x^2-4|$ の交点の個数を考える．



①と $y=x^2-4$ $(x\geqq 2)$ の交点の x 座標は

$$x^2-4=ax-a^2+1 \quad より \quad x^2-ax+a^2-5=0 \quad ……②$$

において $x\geqq 2$ に存在する解である．

判別式を D とすると $D\geqq 0$ より

$$a^2-4(a^2-5)\geqq 0 \quad よって \quad 0\leqq a\leqq \frac{2\sqrt{15}}{3}=\sqrt{\frac{20}{3}} \quad ……③$$

$f(x)=x^2-ax+a^2-5$ とすると

$$f(2)=a^2-2a-1 \qquad グラフの軸：x=\frac{a}{2}$$

$x\geqq 2$ で①と $y=x^2-4$ が２交点（接するときを含む）をもつのは

$f(2)\leqq 0$ より　$a\geqq 1+\sqrt{2}$

軸$\geqq 2$ より　$a\geqq 4$　　よって，③との共通部分はない．

したがって，$x\geqq 2$ において，①と $y=x^2-4$ のグラフが２交点をもつことも，接することもない．

$x\geqq 2$ で①と $y=x^2-4$ が１交点のみをもつのは

$f(2)\leqq 0$ より　$0\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}$

特に，$a=1+\sqrt{2}$ のときは①が点 $(2, 0)$ を通るときである．

したがって，$a>1+\sqrt{2}$ のときは，①と $y=x^2-4$ の交点はない．

以上の結果に $a<0$ のときを考慮し，求める交点の個数は

$$\begin{cases} |a|<-1+\sqrt{2} \text{ のとき 4 個} \\ |a|=-1+\sqrt{2} \text{ のとき 3 個} \\ -1+\sqrt{2}<|a|<1+\sqrt{2} \text{ のとき 2 個} \\ |a|=1+\sqrt{2} \text{ のとき 1 個} \\ |a|>1+\sqrt{2} \text{ のとき 0 個} \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] xy 平面上において，点Pを通る直線 l と曲線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}$ である．この条件を満たす点Pが描く軌跡を求め，これを図示せよ．

P$(X,\ Y)$ とおく．

$l: y=m(x-X)+Y=l(x)$ と $y=x^2$ の2交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$x^2-mx+mX-Y=0$ の2解が α, β である．

よって　$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=mX-Y$

このとき，2つのグラフで囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta \{l(x)-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$S=\frac{1}{6}$ より　$(\beta-\alpha)^3=1$

よって　$(\beta-\alpha)^2=1$　より　$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=1$

$$m^2-4(mX-Y)=1$$

$$m^2-4Xm+4Y-1=0$$

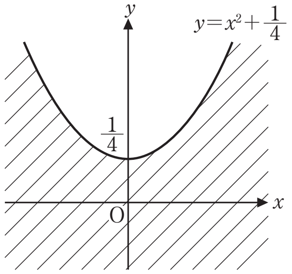
この m の2次方程式の判別式を D とすると，m が実数となるのは

$$\frac{D}{4}=4X^2-(4Y-1)\geqq 0$$

よって　$Y\leqq X^2+\frac{1}{4}$ のとき，これを満たす $(X,\ Y)$ が，題意を満たす直線の傾き m が存在する条件であり，つまりは直線 l が存在するときに通る点である．

よって　$\boldsymbol{y\leqq x^2+\frac{1}{4}}$

図示すると右図斜線部分（境界含む）．



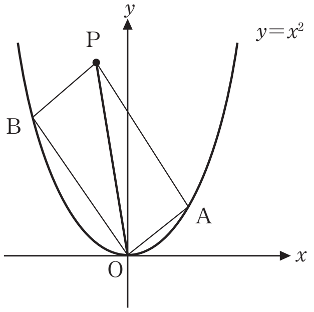
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　O を原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の 2 点 A, B に対し，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$ とおく．

(1)　t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2$ のとき，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め，図示せよ．

$A(a, a^2)$，$B(b, b^2)$ とおく．



(1)　$t=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ab+(ab)^2=\left(ab+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geqq-\dfrac{1}{4}$

等号成立は $ab=-\dfrac{1}{2}$ のとき．

よって　$\boldsymbol{t\geqq-\dfrac{1}{4}}$

(2)　$t=2$ より　$(ab)^2+ab-2=0$

よって　$ab=1,\ -2$

$P(X, Y)$ とおくと，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{cases} X=a+b \\ Y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \end{cases}$$

よって　$Y=X^2-2ab$　……①

ここで，a，b は 2 次方程式

$s^2-(a+b)s+ab=0$　つまり　$s^2-Xs+ab=0$　の 2 解である．

実数条件より　$X^2-4ab\geqq0$　……②

$ab=1$ のとき　　①より $Y=X^2-2$

②より $X^2-4\geqq0$　　よって　$X\leqq-2,\ 2\leqq X$

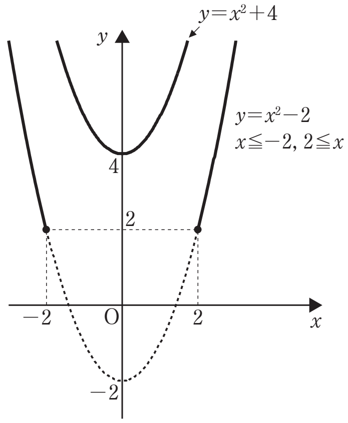
$ab=-2$ のとき　①より $Y=X^2+4$

②より $X^2+8\geqq0$　　これはすべての実数 X で成り立つ．

以上より，求める点 P の軌跡は

$\boldsymbol{y=x^2-2\ (x\leqq-2,\ 2\leqq x)}$　**または**　$\boldsymbol{y=x^2+4}$

図示すると，右図の実線部．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題 (2)

1　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　${a_n}^2 - 2{b_n}^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ．

$n=1$ のとき　$3+2\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$　a_1，b_1 は自然数すなわち有理数より　$a_1=3, b_1=2$

(1)　$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n + b_n\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1} \\ &= (3+2\sqrt{2})(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2}) \\ &= (3a_{n-1}+4b_{n-1}) + (2a_{n-1}+3b_{n-1})\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1}} \\ \boldsymbol{b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}} \end{cases}$

(2)　${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = (3a_{n-1}+4b_{n-1})^2 - 2(2a_{n-1}+3b_{n-1})^2 = {a_{n-1}}^2 - 2{b_{n-1}}^2$

よって　${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = {a_1}^2 - 2{b_1}^2 = \mathbf{1}$

(3)　${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = 1$　より　$(a_n + \sqrt{2}\,b_n)(a_n - \sqrt{2}\,b_n) = 1$

$$a_n - \sqrt{2}\,b_n = \frac{1}{a_n + \sqrt{2}\,b_n}$$

よって　$\dfrac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{b_n(a_n + \sqrt{2}\,b_n)}$

ここで，$2 > 1.96$ より，$\sqrt{2} > 1.4$

(1)より　$a_2=17$，$b_2=12$

$$b_2(a_2 + \sqrt{2}\,b_2) > 12(17 + 1.4 \times 12) = 405.6$$

よって　$\dfrac{a_2}{b_2} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{405.6}$

$a_3=99$，$b_3=70$

$$b_3(a_3 + \sqrt{2}\,b_3) > 70(99 + 1.4 \times 70) = 13790$$

よって　$\dfrac{a_3}{b_3} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{13790} < \dfrac{1}{10000}$

したがって，求める有理数の 1 つは

$$\frac{a_3}{b_3} = \boldsymbol{\frac{99}{70}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 関係式 $x^a=y^b=z^c=xyz$ を満たす1とは異なる3つの正の実数の組 (x, y, z) が，少なくとも1組存在するような，正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

$x^a=y^b=z^c=xyz=k$ とおく．（k は実数）

$x=k^{\frac{1}{a}}$, $y=k^{\frac{1}{b}}$, $z=k^{\frac{1}{c}}$

また　$xyz=k$ より　$k^{\frac{1}{a}}\cdot k^{\frac{1}{b}}\cdot k^{\frac{1}{c}}=k$　よって　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$　……①

$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{a}$　より　$1 \leqq \dfrac{3}{a}$　よって　$a \leqq 3$

$a=1$ は明らかに①を満たさず不適.

$a=2$ のとき

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$$

よって　$b \leqq 4$　$a \leqq b$ より　$2 \leqq b \leqq 4$

$b=2$ は明らかに不適.

$b=3$ のとき　$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$c=6$

$b=4$ のとき　$c=4$

$a=3$ のとき

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{b}$　　よって　$b \leqq 3$ より　$b=3$　　このとき　$c=3$

以上より　$(a, b, c)=$**(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)**

3 A，B，C の3人が，それぞれさいころを振り，出た目の大きい順に順位を決めるものとする．ただし，同じ目が出た場合は同順位とする．たとえば，A と B が5を出し C が3なら，A と B が1位で C は3位とする．A が5を出し B と C が3なら，A が1位で B と C は2位とする．また, A も B も C も5を出せば, 3人とも1位とする．以下の問いに答えよ．

(1) 1位，2位，3位が，すべて単独で決まる確率を求めよ．

(2) A が1位となる確率を求めよ．

(3) A と B の少なくとも一方が1位となる確率を求めよ．

(4) 単独で1位なら4点，2人で1位なら3点，3人で1位なら2点，単独で2位なら2点，2人で2位なら1点，3位なら0点が与えられる場合，A の得点の期待値を求めよ．

(1) A，B，C がすべて異なる目を出すときである．よって求める確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　A が k の目を出したとき，A が 1 位となる確率を A_k とする．

このとき，B，C は k 以下の目である．

したがって　$A_k=\dfrac{k^2}{6^3}$　　よって，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}A_k=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13=\mathbf{\frac{91}{216}}$

(3)　B が 1 位になる確率は(2)より $\dfrac{91}{216}$ である．

A と B が 1 位になるのは，A，B が k の目を出したときに，C が k 以下の目であるときであるから，その確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6^3}=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot7=\frac{7}{72}\qquad\text{よって，求める確率は}\quad\frac{91}{216}+\frac{91}{216}-\frac{7}{72}=\mathbf{\frac{161}{216}}$$

(4)　A の得点を X とする．

$X=4$ となるのは，A が単独 1 位となるときである．

　それは A が k の目を出したときに，B，C が $k-1$ 以下の目であるときであり，その確率は

$$\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}(k-1)^2=\frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i^2=\frac{55}{216}$$

$X=3$ となるのは，A が 1 位で，かつ B か C の一方が 1 位（もう一方は 3 位）のときであり，その確率は

$$\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(k-1)=\frac{2}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i=\frac{5}{36}=\frac{30}{216}$$

$X=2$ となるのは次の場合

・3 人が 1 位のときで，その確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{6}{216}$$

・A が単独 2 位のときであり，

1 位の人の目は $k+1$ 以上の $6-(k+1)+1=6-k$（通り）

3 位の人の目は $k-1$（通り）

よって，その確率は　$\displaystyle\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(6-k)(k-1)=\frac{40}{216}$

以上より　$\dfrac{6}{216}+\dfrac{40}{216}=\dfrac{46}{216}$

$X=1$ となるのは，A が 2 位で，かつ B か C の一方が 2 位（もう一方は 1 位）のとき．

その確率は　$\displaystyle\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(6-k)=\frac{2}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i=\frac{30}{216}$

よって，求める期待値は

$$E(A)=4\cdot\frac{55}{216}+3\cdot\frac{30}{216}+2\cdot\frac{46}{216}+1\cdot\frac{30}{216}=\mathbf{2}\ \text{（点）}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 (1)　0以上の2数α，βについて，相加平均$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$が相乗平均$\sqrt{\alpha\beta}$以上であることを証明せよ．

(2)　$p>0$，$q>0$，$m>0$とする．座標平面上で点$(p,\ q)$を通り，傾きが$-m$の直線の，x軸，y軸との交点の座標をそれぞれ求めよ．

(3)　(2)の2つの交点と原点の3点を頂点とする三角形の面積の，mを変化させたときの最小値を求めよ．

解答例

(左辺)−(右辺)．ただし両辺0以上なので (左辺)^2−(右辺)^{2}とした．

(1) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-(\sqrt{\alpha\beta})^2=\dfrac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\dfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2\geqq 0$

「相加平均≧相乗平均」の証明．これに限らず，数学の「公式の証明」は一通りできるようにしておこう．

したがって　$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\geqq(\sqrt{\alpha\beta})^2$

$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$より，両辺0以上．　よって　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}$　（等号は$\alpha=\beta$のとき）

(2)　与えられた直線の式は

$$y=-m(x-p)+q$$

これとx軸との交点の座標は$\left(\boldsymbol{\dfrac{q}{m}+p,\ 0}\right)$

y軸との交点の座標は$(\boldsymbol{0,\ mp+q})$

(3)　三角形の面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}+p\right)(mp+q)=\frac{1}{2}\left(p^2m+\frac{q^2}{m}\right)+qp$$

(1)より　$\dfrac{1}{2}\left(p^2m+\dfrac{q^2}{m}\right)\geqq\sqrt{p^2m\cdot\dfrac{q^2}{m}}=pq$　（$p\geqq 0$，$q\geqq 0$より）

（等号成立は　$p^2m=\dfrac{q^2}{m}$　つまり　$m=\dfrac{q}{p}$のとき）

ゆえに，Sの最小値は　$\boldsymbol{2pq}$　$\left(m=\dfrac{q}{p}のとき\right)$

(1)の利用．
このように
・積が一定値のときの「和の最小値」や
・和が一定値のときの「積の最大値」などに
「相加平均≧相乗平均」が用いられることがある．

※ [　　] は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を正の整数とする．

(1)　$a>b>0$ とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^{n+1}-b^{n+1}>(n+1)(a-b)b^n$$

(2)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ と $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ の大小を比較せよ．

解答例

(1)　$a^{n+1}-b^{n+1}$

$=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)$

$>(a-b)(b^n+b^{n-1}\cdot b+\cdots\cdots+b\cdot b^{n-1}+b^n)$　($a>b>0$ より)

$=(n+1)(a-b)b^n$

よって証明された．

$a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1}}_{n\text{ 個}})$

$a>b$ であることを利用して，a をすべて b で書き換えて「下げた」．ここで b が「負の値」の場合は累乗により逆に「大きく」なることもあるので，正の値であることの記述漏れに注意．

(2)　$1+\dfrac{1}{n}=a$，$1+\dfrac{1}{n+1}=b$ とおくと，$a>b>0$

よって，(1)より

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$=a^{n+1}-b^{n+2}$

$=a^{n+1}-b^{n+1}+b^{n+1}-b^{n+2}$

$>(n+1)(a-b)b^n-(b-1)b\cdot b^n$

$=\{(n+1)(a-b)-(b-1)b\}\cdot b^n$

ここは(1)があるので思いつきたいところ．数学の式変形において，こういった「必要なものを追加＆相殺」が時に登場する．引き出しに入れておこう．

ここで　$(n+1)(a-b)-(b-1)b$

$=(n+1)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)-\dfrac{1}{n+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=(n+1)\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{n+2}{(n+1)^2}$

$=\dfrac{1}{n(n+1)^2}>0$　であり，また，$b^n>0$ であることより

差をとったものが「正」または「負」であることを言いたいので，もっともオーソドックスなのは「因数分解」であろう．よって展開せず通分した．もちろん展開により見通しが明るくなる（項が相殺されるなどの）場合はその限りではない．展望をもって変形していこう．

$$\{(n+1)(a-b)-(b-1)b\}\cdot b^n>0$$

よって　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ.

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$　より

$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，この考え方を定着させよう．

この２式は，直線 $\frac{1}{2}x+ty=1$ が点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 m の方程式は $\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

２点を通る直線はただ１通りに表すことができる．よって，この２接点を通る直線はここで求めたもの以外にはないことがわかる．

(2)　$x+2ty-2=0$　より　$(x-2)+2yt=0$

これが（$t>1$ の）任意の実数 t で成立するための条件は　$x-2=0$　かつ　$2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず m は **定点 (2, 0)** を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　aを正の定数とする．放物線$P: y=ax^2$上の動点Aを中心としx軸に接する円をCとする．動点Aが放物線P上のすべての点を動くとき，座標平面上で$y>0$の表す領域において，どの円Cの内部にも含まれない点がある．この点の集まりを図示せよ．

解答例

題意より，円Cの中心を$C(t,\ at^2)$とおくと半径は$at^2(>0)$

円Cの内部の点は

$(x-t)^2+(y-at^2)^2<a^2t^4$　より

$(2ay-1)t^2+2xt-(x^2+y^2)>0$を満たす．

tが存在しないときのx，yの条件は，この不等式を満たさないx，yの条件である．つまりそのときの(x, y)は円Cの内部に含まれない（円Cの周上および外部にある）点を表す．

よって，この式を満たす実数tが存在しないようなx，yの範囲を求める．

$f(t)=(2ay-1)t^2+2xt-(x^2+y^2)$とおく．

（i）$2ay-1=0$のとき

$f(t)=2xt-(x^2+y^2)$

$x=0$のとき　$f(t)=0\cdot t-(0^2+y^2)>0$

これを満たすtは存在しない．このとき$y=\dfrac{1}{2a}$

$x\neq 0$のとき　$f(t)>0$はtの1次不等式となり，これを満たすtは存在し不適．

（ii）$2ay-1\neq 0$のとき

$f(t)$は2次関数である．よって，$f(t)>0$を満たす実数tが存在しない条件は

$$\begin{cases} 2ay-1<0 & \cdots\cdots① \\ x^2+(2ay-1)(x^2+y^2)\leqq 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より　$y<\dfrac{1}{2a}$

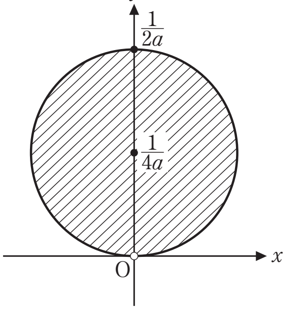
②より　$2ayx^2+(2ay-1)y^2\leqq 0$

$2ax^2+(2ay-1)y\leqq 0$　（$y>0$より）

よって　$x^2+\left(y-\dfrac{1}{4a}\right)^2\leqq\dfrac{1}{16a^2}$

（i）（ii）より，求める点の集合は右図の斜線部分．

（境界は原点を含まず他を含む）



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上で，１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点 P の x 座標を $a(>0)$ とするとき，円の中心 C の座標を求めよ．
　ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が交わり，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

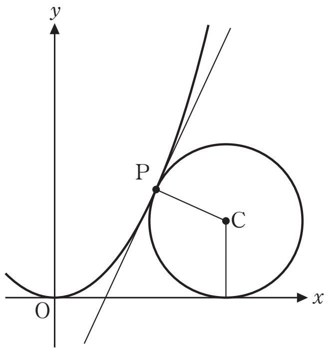
解答例

$y=x^2$ より $y'=2x$

よって，$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2$　より　$y=2ax-a^2$　……①

と表すことができる．



求める円 C の中心を $\mathrm{C}(c,\ r)$ $(c>0,\ r>0)$ とすると

①⊥直線 PC より

$$\frac{r-a^2}{c-a}\cdot 2a=-1 \qquad \text{よって}\quad c=a-2a(r-a^2)\quad \cdots\cdots ②$$

また，PC$=r$ より

$$(c-a)^2+(r-a^2)^2=r^2\quad \cdots\cdots ③$$

③の代わりに
（直線①と円の中心 C との距離）＝（半径 r）
としたいところだが，直線①と円の中心 C との距離は線分 PC の長さそのもの．つまり，円の中心から直線に下ろした垂線の足である点 P の座標がわかっているため，わざわざ「点と直線の距離の公式」を用いる必要がない．

③に②を代入し，r について整理すると

$$4r^2-2(4a^2+1)r+a^2(4a^2+1)=0$$

　円の中心の y 座標 $r<a^2$ であるから　$r=\dfrac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}$

このとき，②より

$$c=a-2a\left(\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}-a^2\right)=\frac{a\left(1+\sqrt{4a^2+1}\right)}{2}$$

ゆえに，求める円の中心の座標は

$$\mathbf{C}\left(\frac{a\left(1+\sqrt{4a^2+1}\right)}{2},\ \frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}\right)$$

〔別解〕

円 C：$(x-c)^2+(y-r)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$(a-c)(x-c)+(a^2-r)(y-r)=r^2$　より　$(a-c)x+(a^2-r)y+c^2-ac-a^2r=0$　と表せる．

これと①の $2ax-y-a^2=0$　が一致することより，係数を比較して

$a-c=2ak,\ a^2-r=-k,\ c^2-ac-a^2r=-a^2k$

これらより k を消去することで，c と r を導くことができる．

（片方の係数を k 倍するのを忘れずに．たとえば $x+y=1$ と $2x+2y=2$ は同一式である）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=x^3-3x^2+x$ とし，$y=f(x)$ が定める曲線を F とする．

(1)　直線 $y=2x-3$ と曲線 F の３つの交点の座標を求めよ．

(2)　(1)で求めた３つの交点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$，$\mathrm{C}(c,\ f(c))$ $(a<b<c)$ とし，曲線 F 上に点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ をとる．P が $b<p<c$ を満たすとき，三角形 BPC の面積 S を p を用いて表せ．

(3)　(2)で求めた面積 S の最大値とそのときの p の値を求めよ．

解答例

(1)　直線 $y=2x-3$ と曲線 F：$y=x^3-3x^2+x$ の交点の x 座標は

$$x^3-3x^2+x=2x-3 \qquad x^3-3x^2-x+3=0$$

$$(x+1)(x-1)(x-3)=0$$

３次方程式の解を求めるには因数分解が基本．３つの解のうち少なくとも１つは実数解であるため，その解を見つけ，その後「組立除法」を用いるとよい．

よって　$x=-1,\ 1,\ 3$　　ゆえに，３交点の座標は $\boldsymbol{(-1,\ -5)}$，$\boldsymbol{(1,\ -1)}$，$\boldsymbol{(3,\ 3)}$

(2)　(1)より $\mathrm{A}(-1,\ -5)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$，$\mathrm{C}(3,\ 3)$

$\mathrm{BC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

また，点 P の座標を $\mathrm{P}(p,\ p^3-3p^2+p)$　$(1<p<3)$ とおくと

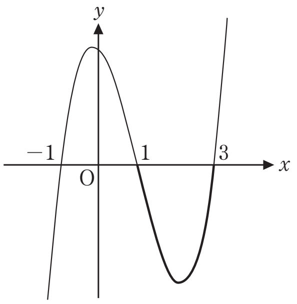
点 P と直線 $y=2x-3$　つまり　$2x-y-3=0$ との距離 d は

$$d=\frac{|2p-(p^3-3p^2+p)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|p^3-3p^2-p+3|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|(p+1)(p-1)(p-3)|}{\sqrt{5}}=\frac{-p^3+3p^2+p-3}{\sqrt{5}}$$

（$1<p<3$ より）



$y=x^3-3x^2-x+3$

よって，三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{-p^3+3p^2+p-3}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-p^3+3p^2+p-3}$$

(3)　$S(p)=-p^3+3p^2+p-3$ とおくと　$S'(p)=-3p^2+6p+1$

$S'(p)=0$ より　$p=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$　$(1<p<3)$

p	1	…	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	…	3
$S'(p)$		＋	0	−	
$S(p)$	0	↗		↘	0

ここで，$S(p)=S'(p)\cdot\left(\dfrac{1}{3}p-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{8}{3}p-\dfrac{8}{3}$ より

$S(p)\div S'(p)$ による次数下げ．

求める S の最大値は

$$S\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{3+2\sqrt{3}}{3}-\frac{8}{3}=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{9}}$$

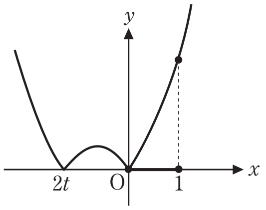
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|dx$ とおく．$f(t)$ の最小値とそれを与える t の値を求めよ．

解答例

$t \leqq 0$ のとき

$$f(t)=\int_0^1 (x^2-2tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_0^1=-t+\frac{1}{3}$$

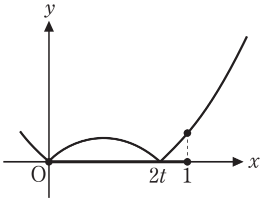


$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

範囲によるインテグラルの分割！

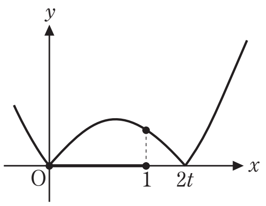
$$f(t)=\int_0^{2t}(-x^2+2tx)dx+\int_{2t}^1 (x^2-2tx)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^{2t}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_{2t}^1=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$



$t \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^1 (-x^2+2tx)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^1=t-\frac{1}{3}$$



$f(t)$ は $t \leqq 0$ において単調減少，$t \geqq \dfrac{1}{2}$ において単調増加する．

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ において　$f'(t)=8t^2-1$

$f'(t)=0$ となるのは　$t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

t	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		－	0	＋	
$f(t)$		↘		↗	

以上より，求める最小値は　$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を正の数とする．xy 平面において，次の条件(i)と(ii)を満たす直線 l が存在するような p の範囲を求めよ．

(i)　l の y 切片は p である．

(ii)　放物線 $C: y=3x^2$ と l で囲まれる図形の面積は 4 以下である．

解答例

$l: y=mx+p$　……①　とおく．

これと，$C: y=3x^2$　……②　の交点の x 座標は

$mx+p=3x^2$　　$3x^2-mx-p=0$　……③　の異なる 2 解である．

これを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=\dfrac{m}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{p}{3}$

①と②で囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta (mx+p-3x^2)dx$$
$$=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

2 グラフの交点の x 座標を使って因数分解！-3 は前に出した．

$$=-3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S\leqq 4$ より　$\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\leqq 4$

$(\beta-\alpha)^3\leqq 8$

$\beta-\alpha>0$ より　$(\beta-\alpha)^2\leqq 4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\leqq 4$

$\left(\dfrac{m}{3}\right)^2-4\left(-\dfrac{p}{3}\right)\leqq 4$

したがって　$m^2\leqq 36-12p$

これを満たす実数 m が存在するのは　$36-12p\geqq 0$　つまり　$p\leqq 3$ のとき．

(左辺)$\geqq 0$ である．よって右辺が 0 未満となるとき，これを満たす m が存在しない．

よって，求める p の範囲は　$\mathbf{0<p\leqq 3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形 ABC の内部に点 P をとって，AP の中点を M，BM の中点を N とするとき，P が CN の中点となるようにしたい．点 P の位置をどのように定めればよいか．

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す方針で解答する．**1次独立の２つのベクトルで表す**のが平面ベクトルの基本である．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　……①

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AN}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……②

②に①を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\frac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　したがって　$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

よって，線分 BC を 2：1 に内分する点を Q とすると，線分 AQ を 6：1 に内分する点を P とすればよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標空間内に4点P(3, 1, 4), A(1, 2, 3), B(1, 1, 2), C(2, 1, 1)がある．直線PA，直線PB，直線PCとxy平面の交点をそれぞれA′，B′，C′とする．

(1) △ABCの面積を求めよ．

(2) △A′B′C′の面積を求めよ．

解答例

(1) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$より　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$より　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+1+2=3$　　よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2\cdot(\sqrt{6})^2-3^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

〔別解〕

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$　　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ ← △ABCは二等辺三角形

よって，CAを底辺とした時の△ABCの高さは　$\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\overrightarrow{PA'}=k\overrightarrow{PA}$より　$\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OP}=k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\right)$

$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OP}=(3-2k,\ 1+k,\ 4-k)$

A′はxy平面上より　$4-k=0$　　$k=4$　　よって　A′$(-5,\ 5,\ 0)$

同様に　$\overrightarrow{OB'}=l\overrightarrow{OB}+(1-l)\overrightarrow{OP}=(3-2l,\ 1,\ 4-2l)$

B′はxy平面上より　$4-2l=0$　　$l=2$　　よって　B′$(-1,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{OC'}=m\overrightarrow{OC}+(1-m)\overrightarrow{OP}=(3-m,\ 1,\ 4-3m)$

C′はxy平面上より　$4-3m=0$　　$m=\frac{4}{3}$　　よって　C′$\left(\frac{5}{3},\ 1,\ 0\right)$

線分B′C′はx軸に平行であり，その長さは　$B'C'=\frac{8}{3}$

これを△A′B′C′の底辺としたときの高さは4

よって　$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot4=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

※$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PA}$として直線のベクトル方程式を直接作成してもよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 2$ とする．このとき，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2) $\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

解答例

(1) $\dfrac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1$ ……①

注意すべきは，①の n を $n-1$ に換えた時，左辺は n が $n-1$ に変わるだけであるが，右辺は個数が n 個から $n-1$ 個に減るということ．

$n\geqq 2$ のとき

$\dfrac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_{n-1}+2a_{n-2}+3a_{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)a_1$ ……②

①，②を辺々引くと ←「和から一般項」の基本手法

$\dfrac{n(n+1)}{2}b_n-\dfrac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1$

よって

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}}$$

(2) $b_n=p+(n-1)q$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}\{p+(n-1)q\}-\frac{(n-1)n}{2}\{p+(n-2)q\}}$$
$$=pn+\frac{3}{2}q(n-1)n$$

①より $a_1=b_1=p$

したがって　$a_n=\left\{pn+\dfrac{3}{2}q(n-1)n\right\}-\left\{p(n-1)+\dfrac{3}{2}q(n-2)(n-1)\right\}$

$=p+3q(n-1)$　$(n\geqq 2)$

この式は $n=1$ のときも成り立つ．

よって　$\boldsymbol{a_n=p+3q(n-1)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列$\{a_n\}$は，すべての正の整数nに対して$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$を満たしているとする．

このとき，すべての正の整数nに対して$a_n=0$であることを示せ．

解答例

$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　……① がすべての正の整数nで成り立つとき

「すべての正の整数nで$a_n=0$」……(※)であることを示す．

〔Ⅰ〕 $n=1$のとき

①より　$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$

$0 \leqq 3a_1$より　$a_1 \geqq 0$　　$3a_1 \leqq a_1$より　$a_1 \leqq 0$　　よって　$a_1=0$

したがって，(※)は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n \leqq i$（iは自然数）を満たすすべての正の整数nで(※)が成り立つと仮定する．

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_i=0$

$n=i+1$のときを考える．

①で，$n=i+1$のとき

$$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq \sum_{k=1}^{i+1} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_i+a_{i+1}=a_{i+1}\ （仮定より）$$

したがって　$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq a_{i+1}$　〔Ⅰ〕同様　$a_{i+1}=0$

よって，$n=i+1$のときも(※)は成り立つ．

ある1つの項で成り立つことの仮定ではなく，それまでのすべての項で成り立つことを仮定する．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，すべての正の整数nに対して$a_n=0$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　1つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている．この箱から m 枚 $(3 \leqq m \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(m)$ とする．

(1)　$p(m)$ を求めよ．

(2)　$4 \leqq m \leqq 12$ のとき，$f(m)=\dfrac{p(m-1)}{p(m)}$ を求めよ．

(3)　$p(m)$ を最大にする m の値を求めよ．

解答例

(1)　m 枚のカードの選び方は ${}_{40}\mathrm{C}_m$ 通り．

3枚の同じ数のカードの選び方，およびそれとは異なる $m-3$ 枚のカードの選び方は

・同じカードの数字の選び方が10通り

・その数字が書かれたカードの選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り

これらとは異なる $m-3$ 枚のカードの選び方は

・数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_{m-3}$ 通り

・それぞれの数字が書かれたカードの選び方が 4^{m-3} 通り

同じものが複数個あるときは，この部分が抜けやすいので注意．確率は同じものであってもすべて区別する世界．

以上より，求める確率は

$$p(m)=\frac{10\cdot{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_{m-3}\cdot 4^{m-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_m}=\frac{10\cdot 4\cdot\dfrac{9!}{(m-3)!(12-m)!}\cdot 4^{m-3}}{\dfrac{40!}{m!(40-m)!}}=\boldsymbol{\frac{9!m!(40-m)!4^{m-3}}{39!(m-3)!(12-m)!}}$$

(2)

$$f(m)=\boxed{\frac{p(m-1)}{p(m)}}=\frac{\dfrac{9!(m-1)!(41-m)!4^{m-4}}{39!(m-4)!(13-m)!}}{\dfrac{9!m!(40-m)!4^{m-3}}{39!(m-3)!(12-m)!}}=\boldsymbol{\frac{(41-m)(m-3)}{4m(13-m)}}$$

m 枚のときと $m-1$ 枚のときの確率の比較のための式である．

(3)　$f(m)>1$ とすると　$\dfrac{(41-m)(m-3)}{4m(13-m)}>1$　　$(41-m)(m-3)>4m(13-m)$

$3m^2-8m-123>0$

$g(m)=3m^2-8m-123$　とすると，$4 \leqq m \leqq 12$ で $g(m)$ は単調増加であり

$g(7)=-32<0$　　$g(8)=5>0$ より　$g(m)>0$ となるのは $m \geqq 8$ のときである．

したがって $\boxed{f(m)=\dfrac{p(m-1)}{p(m)}>1 \quad \text{つまり } p(m-1)>p(m) \text{ となる}}$ のは $8 \leqq m \leqq 12$ のとき

「減少する」とき

逆に，$p(m-1)<p(m)$ となるのは，$4 \leqq m \leqq 7$ のときである．

今回は $p(m-1)=p(m)$ となる整数 m は存在しない．よって「減少」しなければ「増加」する．

よって，$p(3)<p(4)<\cdots\cdots<p(7)>p(8)>\cdots\cdots>p(12)$ より

$p(m)$ を最大にする m の値は　$\boldsymbol{m=7}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1回目はAが投げる．

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

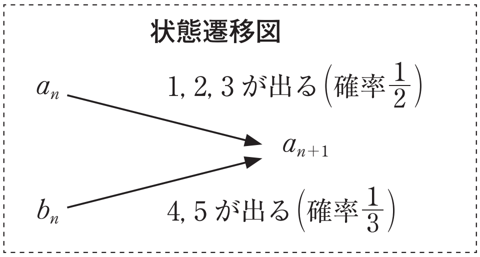
6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

(1) n 回目にAがサイコロを投げる確率を a_n, Bがサイコロを投げる確率を b_n とする．a_n, b_n を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ．

(3) n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ．

解答例



(1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n$ ……①

$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n$ ……②

①＋②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n),\ a_1+b_1=1+0=1$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項1，公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列である．　よって　$a_n+b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

①－②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n),\ a_1-b_1=1 \qquad よって \quad a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

以上より，$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$, $\boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$

(2) n 回目にAがサイコロを投げ，6の目が出ればよい．

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\boldsymbol{\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3) $$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a，b，c は正の整数で，$a<b<c$，$a+b<c$ を満たすものとする．このとき整式 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$ が $x-c$ で割り切れるような $(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ．

解答例

$ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174=(x-c)Q(x)$ とおくと

$x=c$ のとき $ac^2-(a^2+ab)c+a^2b-174=0$

$a\{c^2-(a+b)c+ab\}=174$

$a(c-b)(c-a)=174=2\cdot3\cdot29$ ←因数分解により「積が一定値である３つの整数」を考える．

ここで，$a+b<c$ より　$a<c-b$

また，$a<b$ より　$c-b<c-a$ ←引く数が小さくなれば，全体としては大きくなる．

よって　$a<c-b<c-a$

したがって　$(a,\ c-b,\ c-a)=(1,\ 2,\ 87),\ (1,\ 3,\ 58),\ (1,\ 6,\ 29),\ (2,\ 3,\ 29)$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 86,\ 88),\ (1,\ 56,\ 59),\ (1,\ 24,\ 30),\ (2,\ 28,\ 31)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1から n までの自然数1，2，3，……，n の和を S_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　n を4で割った余りが0または3ならば，S_n が偶数であることを示せ．

(2)　S_n が偶数ならば，n を4で割った余りが0または3であることを示せ．

(3)　S_n が4の倍数ならば，n を8で割った余りが0または7であることを示せ．

解答例

$S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

m を整数とする．

(1)　$n=4m$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 4m(4m+1)=2m(4m+1)$　よって S_n は偶数

余りによる分類

$n=4m+3$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+3)(4m+4)=2(m+1)(4m+3)$　よって S_n は偶数

以上より題意は示された．

(2)　n を4で割った余りが1または2であるときを考える．

$n=4m+1$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+1)(4m+2)=(2m+1)(4m+1)$　よって S_n は奇数

$n=4m+2$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+2)(4m+3)=(2m+1)(4m+3)$　よって S_n は奇数

よって，対偶が真より題意は示された．

(3)　S_n が4の倍数ならば S_n は偶数である．

よって，(2)より n を4で割った余りが0または3である．

したがって，$n=8m$，$8m+3$，$8m+4$，$8m+7$ のいずれかである．

$n=8m+3$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(8m+3)(8m+4)=2(2m+1)(8m+3)=2\times$(奇数)

よって，S_n は4の倍数ではない．

$n=8m+4$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(8m+4)(8m+5)=2(2m+1)(8m+5)=2\times$(奇数)

よって，S_n は4の倍数ではない．

以上より，$n=8m$，$8m+7$ に限られ，題意は示された．

可能性がある n の分類において，「4で割った余りが0，3にならなければ S_n は4の倍数にならない」，いわゆる「対偶」を示した．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a, t を実数とし，a は $|a| \leqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x \leqq a) \\ -a^2+3 & (x > a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また l を $y=tx+t+2$ で定まる直線とする．

(1)　直線 l は t によらず定点を通ることを示せ．また l が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような t を求めよ．

(2)　C と l が相異なる２点のみを共有するような t の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

解答例

(1)　$l : y=tx+t+2$　より　$(x+1)t+(-y+2)=0$

これが t の値によらず成り立つのは　$x+1=0$　かつ　$-y+2=0$　つまり

$x=-1$, $y=2$ のときである．

よって，直線 l は t の値によらず定点 $(-1,\ 2)$ を通る．

また，直線 $l : y=tx+t+2$ と放物線 $y=-x^2+3$ の共有点の x 座標について

$$tx+t+2=-x^2+3 \qquad x^2+tx+t-1=0 \quad \cdots\cdots① \qquad (x+1)(x+t-1)=0$$

よって，共有点の x 座標は $x=-1$, $-t+1$

この２解が一致するときが直線 l と放物線が接するときである．

よって　$-t+1=-1$ より　$\boldsymbol{t=2}$

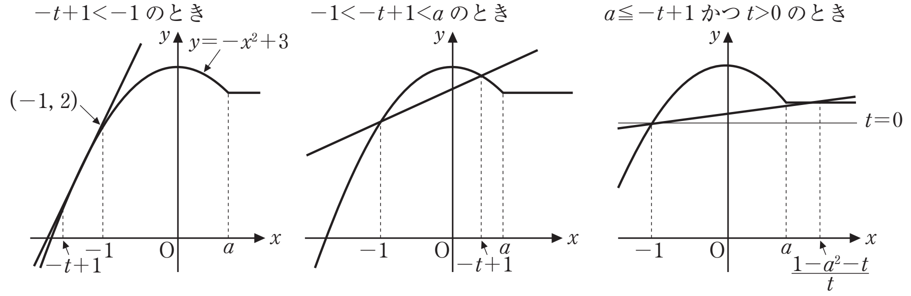
(2)　(1)より C と l の共有点の１つは $(-1, 2)$ であり，また $t=2$ のとき２つのグラフは接する．

また，直線 l と放物線 $y=-x^2+3$ の交点の x 座標で $x=-1$ 以外のものは $x=-t+1$ である．

直線 l と直線 $y=-a^2+3$ の交点の x 座標について

$$tx+t+2=-a^2+3 \text{ のとき} \qquad t\neq 0 \text{ のとき} \quad x=\frac{1-a^2-t}{t}$$

この結果と C と直線 l（傾き t）のグラフより，題意を満たす場合を考える．



以上より，$|a| \leqq 1$ において，求める t の条件とその時の共有点の x 座標は

$\boldsymbol{1-a<t<2,\ 2<t}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=-1,\ -t+1}$

$\boldsymbol{0<t \leqq 1-a}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1-a^2-t}{t}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える.

(1)　t が実数全体を動くとき，放物線 $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ.

(2)　D を(1)で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする．D と l とで囲まれた部分の面積を求めよ.

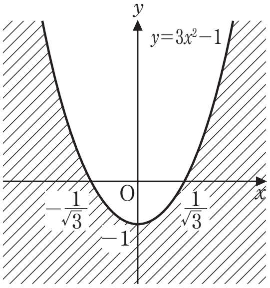
解答例

(1)　$y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$　より　$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$

この式を満たす実数 t が存在する条件は，判別式 $D\geqq 0$

よって　$9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$　　$y\leqq 3x^2-1$

したがって，これが求める領域は右図斜線部分.（境界含む）



(2)　$D: y=3x^2-1$　　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，$C: y=-x^2-1$ より $y'=-2x$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における C の接線 l の方程式は

$$y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3}\quad より\quad y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$$

これと D との共有点の x 座標は

$$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\qquad 9x^2+2\sqrt{3}\,x-1=0$$ の２解である．

この２解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \beta=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

よって，D と l で囲まれた部分の面積は

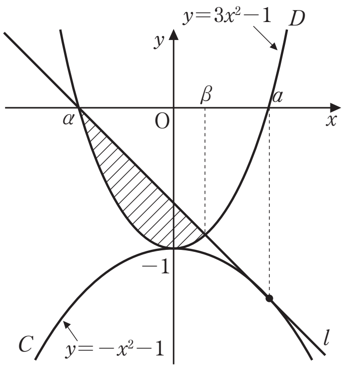
$$\int_\alpha^\beta\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\right)-(3x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(-3x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{32\sqrt{3}}{243}}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 (1)　自然数 a，b は，$1<a<b$ および $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{5}{3}$ を満たす．a，b の組をすべて求めよ．

(2)　自然数 a, b, c は，$1<a<b<c$ および $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{12}{5}$ を満たす．a，b，c の組をすべて求めよ．

解答例

(1)　$a \geqq 4$ のとき，自然数 a，b が $a<b$ を満たすことより $b \geqq 5$

このとき，$1+\frac{1}{a} \leqq \frac{5}{4}$，$1+\frac{1}{b} \leqq \frac{6}{5}$ より　$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \leqq \frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$

よって $a \geqq 4$ は題意を満たすことはなく不適．

したがって，$a=2$，3 に限られる．

$a=2$ のとき　$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{5}{3}$　　より　$b=9$

$a=3$ のとき　$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{5}{3}$　　より　$b=4$

以上より，求める a，b の組は　$(a,\ b)=(2,\ 9)$，$(3,\ 4)$

(2)　$a \geqq 4$ のとき，$b \geqq 5$，$c \geqq 6$

このとき，$1+\frac{1}{a} \leqq \frac{5}{4}$, $1+\frac{1}{b} \leqq \frac{6}{5}$, $1+\frac{1}{c} \leqq \frac{7}{6}$ より

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqq \frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{4}<\frac{12}{5}$$

よって $a \geqq 4$ は題意を満たすことはなく不適．

したがって，$a=2$，3 に限られる．

$a=2$ のとき　$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{12}{5}$　　$\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{8}{5}$

　$b \geqq 4$ のとき(1)と同様に明らかに不適．

　よって，$b=3$ に限られ，このとき $c=5$

$a=3$ のとき　$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{12}{5}$　　$\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{9}{5}$

　$b \geqq 4$ のとき(1)と同様に明らかに不適．よって題意を満たす b は存在しない．

以上より，求める a，b，c の組は　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 5)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ある袋に 10 と書かれた 2 枚のカードと 5 と書かれた 3 枚のカードが入っている．この袋の中をよくかきまぜてから，カードを取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) この袋からカードを 2 枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計の期待値を求めよ．

(2) 最初に，この袋からカードを 2 枚取り出す．2 枚のカードに書かれた数が異なる場合には，次もそのまま続けて 3 枚目のカードを取り出す．一方，初めに取り出したカードに書かれた数が同じ場合には，そのうちの 1 枚のカードを袋に戻した後に，3 枚目のカードを取り出すことにする．このとき，袋に戻したカードも含めて，取り出した 3 枚のカードに書かれていた数の合計の期待値を求めよ．

解答例

(1) カードを 2 枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計値は 10, 15, 20 のいずれかである．

10 となる確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$　　15 となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{5}$

20 となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$　　よって，求める期待値は $10\cdot\dfrac{3}{10}+15\cdot\dfrac{3}{5}+20\cdot\dfrac{1}{10}=14$

(2) この試行を終えたとき，カードに書かれた数の合計値は 15，20，25，30 のいずれかである．

15 となるのは，3 枚のカードの数がすべて 5 のときである．すなわち，最初に取り出した 2 枚がともに 5 であり，このうち 1 枚を戻し次に取り出したカードが 5 の場合である．

その確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{3}{20}$

20 となるのは，3 枚のカードの数が 5，5，10 のときである．すなわち，次の場合．

- 最初に取り出した 2 枚が 5，10 で，次に取り出したカードが 5
- 最初に取り出した 2 枚がともに 5 で，このうち 1 枚を戻し，次に取り出したカードが 10

その確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_1}+\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{11}{20}$

25 となるのは，3 枚のカードの数が 5，10，10 のときである．すなわち，次の場合．

- 最初に取り出した 2 枚が 5，10 で，次に取り出したカードが 10
- 最初に取り出した 2 枚がともに 10 で，このうち 1 枚を戻し，次に取り出したカードが 5

その確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{1}{{}_3C_1}+\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{11}{40}$

30 となるのは，3 枚のカードの数が 10，10，10 のときである．すなわち，最初に取り出した 2 枚がともに 10 であり，このうち 1 枚を戻し次に取り出したカードが 10 の場合である．

その確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{1}{{}_4C_1}=\dfrac{1}{40}$

以上より，求める期待値は $15\cdot\dfrac{3}{20}+20\cdot\dfrac{11}{20}+25\cdot\dfrac{11}{40}+30\cdot\dfrac{1}{40}=\boldsymbol{\dfrac{167}{8}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。